Ordre Supérieur

I Définitions

1 Énoncés d'ordre supérieur

def

Énoncé quantifié sur les éléments d'un ensemble d'ensembles ou d'un ensemble d'applications

ex

1 Tout réel a un entier positif
$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$ } pas d'ordre supérieur

2 $\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$ } pas d'ordre supérieur

3 Toute suite réelle croissante et majorée converge vers sa borne supérieure } d'ordre supérieur

$\forall u \in \preceq(\mathbb{N}, \mathbb{R}),\ (\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n < M) \Rightarrow u \xrightarrow[\infty]{} \sup u$

4 Notons $\simeq$ "est en bijection".
$\forall A, B,\ A \simeq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \simeq \mathcal{P}(B)$ } d'ordre supérieur

ex la curryfication
soient A, B, C des ensembles

$$A^{B\times C} \simeq (A^C)^B$$

$$\phi : \begin{cases} A^{B\times C} \longrightarrow (A^C)^B \\ f \longmapsto (b \mapsto (c \mapsto f(b,c))) \end{cases}$$

$$\psi : \begin{cases} (A^C)^B \longrightarrow A^{B\times C} \\ f \longmapsto ((b,c) \longmapsto g(b)(c)) \end{cases}$$

ϕ et ψ sont bien en bijection ($\phi = \psi^{-1}$ et $\phi^{-1} = \psi$)

ex $A = B = C = \mathbb{R}$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{cases}$$

$$\phi(f) : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ x \mapsto (y \mapsto x+y) \end{cases}$$

Par exemple, $\phi(f)(0) = id_{\mathbb{R}}$

$\phi(f)(1) = succ = id_{\mathbb{R}} + 1$

$\phi(f)(2) = id_{\mathbb{R}} + 2$

2 Applications d'ordres supérieurs

def Application d'ordre supérieur

Application avec source et/ou but des ensembles d'ensembles ou d'applications

ex

1 ϕ et ψ (i.e. curry et uncurry) sont d'ordres supérieurs

2 $U : \begin{cases} P(E)^2 \rightarrow P(E) \\ (A,B) \mapsto A \cup B \end{cases}$ sont d'ordres supérieurs

3 La dérivation est une application d'ordre supérieur

$$\cdot' : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \longmapsto f' \end{cases}$$

exo $\cdot'$ est injectif ? surjectif ?

Injectivité "$\cdot'$ injective" signifie

$$\forall f,g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f'=g' \Rightarrow f=g$$

contre-exemple :

$$\begin{cases} f = x \mapsto 666 \\ g = x \mapsto \mathrm{TREE}(3) \end{cases}$$

On a $f \neq g$ mais $f'=g'$

Surjective i.e. $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), F'=f$

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Posons $F = x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

D'après le TFA_n, on a $F'=f$ et $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

II Image {directe, réciproque}

1 Définition - Exemples

def

Soit $f : A \to B$ une application

On appelle "image directe par f" l'application

$$\begin{cases} \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B) \\ X \longmapsto \{f(x),\ x \in X\} \end{cases}$$

notatn

$f^{\rightarrow}$ ou f SACRILÈÈÈÈGE !!!

↑ notation de Wyler — ↑ notation éclatée du programme

- On appelle image réciproque par f l'application $\begin{cases} \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \\ Y \longmapsto \{x \in A,\ f(x) \in Y\} \end{cases}$

$f^{\leftarrow}$ ou f^{-1} ABOMINATIÒN PUTAIN DE PROGR

↑ notation de Wyler

⚠ L'image réciproque par f a un sens y compris lorsque f n'est pas bijective

ex

1 $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$.

$f^{\rightarrow}([1,2]) = [1,4]$; $f^{\leftarrow}([1,2]) = [-\sqrt{2},-1] \cup [1,\sqrt{2}]$

$f^{\rightarrow}([-2,1]) = [0,4]$; $f^{\leftarrow}([-2,1]) = [-1,1]$

$f^{\rightarrow}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$; $f^{\leftarrow}([-5,-3]) = \emptyset$

ex

$$d : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f \longmapsto f' \end{cases}$$

$$d^{\rightarrow}(\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$d^{\leftarrow}(\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$d^{\rightarrow}(\mathcal{C}^{1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$d^{\leftarrow}(\mathcal{C}^{1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = \mathcal{C}^{2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Notons par abus $\mathbb{R}[\mathrm{id}]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$d^{\rightarrow}(\mathbb{R}[\mathrm{id}]) = \mathbb{R}[\mathrm{id}]$$

$$d^{\leftarrow}(\mathbb{R}[\mathrm{id}]) = \mathbb{R}[\mathrm{id}]$$

$$d^{\rightarrow}(\preceq(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = \mathbb{R}_{+}^{\mathbb{R}}$$

$d^{\leftarrow}(\preceq(\mathbb{R}, \mathbb{R})) =$ fonctions convexes de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2 Propriétés

prop

Soit $f : A \to B$.

1 $f^{\leftarrow}(\varnothing) = \varnothing$

1 $\{x \in A,\ f(x) \in \varnothing\} = \varnothing$

2 $f^{\leftarrow}(B) = A$

2 $\{x \in A,\ f(x) \in B\} = A$

3 $f^{\rightarrow}(\varnothing) = \varnothing$

3 $\{f(x),\ x \in \varnothing\} = \varnothing$

4 $f^{\rightarrow}(A) = B \Leftrightarrow f \in \Theta\Theta(A, B)$

5 $\forall b \in B,\ \# f^{\leftarrow}(\{b\}) \leqslant 1 \Leftrightarrow f \in \Theta\Theta(A, B)$

4 $f^{\rightarrow}(A) = B \Leftrightarrow B = f^{\rightarrow}(A)$

$\Leftrightarrow B = \{f(x),\ x \in A\} \Leftrightarrow \forall x \in B,\ x \in \{x \in B,\ \exists y \in A,\ f(y) = x\}$

$\Leftrightarrow \forall x \in B,\ x \in$ antécédents de f

$\Leftrightarrow \forall x \in B,\ \exists y \in A,\ f(y) = x$

5 flemme

prop Croissance pour l'inclusion.

Soit $f : A \longrightarrow B$. Alors :

$$f^{\rightarrow}, f^{\leftarrow} \in \underbrace{\preceq_{\subset}}_{\text{croissant pour } \subset}(A, B) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall X, Y \in \mathcal{P}(A),\ X \subset Y \Rightarrow f^{\rightarrow}(X) \subset f^{\rightarrow}(Y) \\ \forall U, V \in \mathcal{P}(B),\ U \subset V \Rightarrow f^{\leftarrow}(U) \subset f^{\leftarrow}(V) \end{cases}$$

dem

Soient $X \subset Y$ deux parties de A.

Soit $h \in f^{\rightarrow}(X)$

Ainsi, il existe $x \in X$ tel que $h = f(x)$

Or $X \subset Y$ donc $x \in Y$.

donc il existe $y \in Y$ tel que $h = f(y)$

Donc $h \in \{y,\ f(y) \in Y\}$

ie $h \in f^{\rightarrow}(Y)$

· Soient $U, V \in P(B)$

Montrons $f^{\leftarrow}(U) \subset f^{\leftarrow}(V)$.

Soit $g \in f^{\leftarrow}(U) = \{x \in A,\ f(x) \in U\}$

Ainsi $f(g) \in U$

Or $U \subset V$ donc $f(g) \in V$

donc $g \in \{x \in A,\ f(x) \in V\} = f^{\leftarrow}(V)$

III Applications indicatives

1 Définition - Examples

def Application indicatrices

Soit E un ensemble. Soit $A \subset E$.

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} E \longrightarrow \{0, 1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

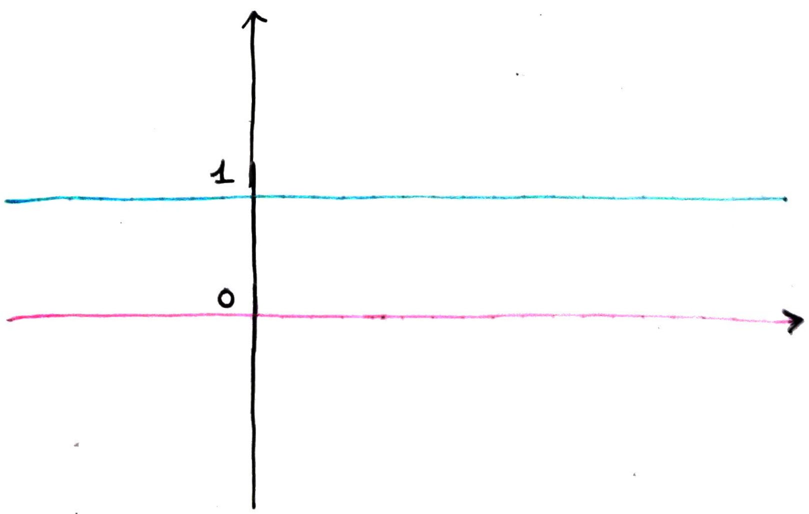
ex $E = \mathbb{R}$; $A = \mathbb{Q}$

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ rationnel} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

notn pour $E = \mathbb{R}$ seulement

$$\chi_A := \mathbb{1}_A^{|\mathbb{R}}$$ (coprolongement à $\mathbb{R}$).

ex $\chi_{\mathbb{Q}}$



2 Bijection $\mathcal{P}(E) \simeq \{0, 1\}^E$

thm

$$\mathbb{1} : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \longrightarrow \{0, 1\}^E \\ A \longmapsto \mathbb{1}_A \end{cases} \in \mathrm{Bij}(\mathcal{P}(E), \{0,1\}^E)$$

(i.e. $\mathbb{1}$ est bijective)

remq

Cette bijection internalise la correspondance entre énoncés et parties de E

$$\begin{aligned} \{\text{Énoncés}\} &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ P(x) &\longmapsto \{x \in E, P(x)\} \\ x \in A &\longleftarrow\!\shortmid A \end{aligned}$$

dem

Notons $\theta : \begin{cases} \{0, 1\}^E \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ f \longmapsto \{x \in E, f(x) = 1\} \end{cases}$

i.e. $\theta : \begin{cases} \{0, 1\}^E \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ f \longmapsto f^{\leftarrow}(\{1\}) \end{cases}$

Montrons que θ est la réciproque de $\mathbb{1}$.

i.e $\begin{cases} \theta \circ \mathbb{1} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)} & (*) \\ \mathbb{1} \circ \theta = \mathrm{id}_{\{0,1\}^E} & (**) \end{cases}$

$(*)$: Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

$$\begin{aligned} (\theta \circ \mathbb{1})(A) &= \theta(\mathbb{1}_A) \\ &= \mathbb{1}_A^{\leftarrow}(\{1\}) \end{aligned}$$

$$= \{x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = 1\}$$

$$= \{x \in E,\ x \in A\}$$

$$= A$$

$$= id_{P(E)}(A)$$

$(**)$:

Soit $f \in \{0,1\}^E$

$$(\mathbb{1} \circ \theta)(f) = \mathbb{1}(f^{\leftarrow}(\{1\}))$$

$$= \mathbb{1}_{f^{\leftarrow}(\{1\})}$$

Mq $\mathbb{1}_{f^{\leftarrow}(\{1\})} = f$

Soit $x \in E$.

$$\mathbb{1}_{f^{\leftarrow}(\{1\})}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in f^{\leftarrow}(\{1\}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \in \{1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = 1 \\ 0 & \text{si } f(x) \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = 1 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0 \end{cases} \quad \text{car } f(x) \in \{0,1\}$$

$$= f(x)$$

corollaire

$$\#E < +\infty \Rightarrow \#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E}$$

dem

Soit E un ensemble fini.

D'après le théorème précédent:

$$\mathcal{P}(E) \simeq \{0,1\}^E$$

$$\Rightarrow \#\mathcal{P}(E) = \#\{0,1\}^{\#E} = 2^{\#E}$$

3 Propriétés de $\mathbb{1}$

prop

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$

1. $\mathbb{1}_{C_A} = 1 - \mathbb{1}_A$
2. $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
3. $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
4. $\mathbb{1}_{A \Delta B} = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) \mod 2$

app Δ est associative

Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Mq $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

$$\Leftrightarrow \mathbb{1}_{A \Delta (B \Delta C)} = \mathbb{1}_{(A \Delta B) \Delta C}$$

Or $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_{A\Delta B} + \mathbb{1}_C \mod 2$

$$= (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \mod 2) + \mathbb{1}_C \mod 2$$

$$= (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C) \mod 2$$

par stabilité de + des congruences

$$= \mathbb{1}_A + (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C \mod 2) \mod 2$$

pour la même raison

$$= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\Delta C} \mod 2$$

$$= \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$$

remq

$(\{0,1\}, +, \times)$ n'est pas un anneau car $1+1=2 \notin \{0,1\}$

mais $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$ l'est.

remq

$$\overline{\mathbb{1}} : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^E \\ A \longmapsto \left(\overline{\mathbb{1}}_A : x \mapsto \begin{cases} \overline{1} & \text{si } x \in A \\ \overline{0} & \text{sinon} \end{cases}\right) \end{cases}$$

est bijective aussi donc

$(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau et $\overline{\mathbb{1}}$ est un isomorphisme d'anneau !

$\square$

déjà :/