Opérations élémentaires

Systèmes

Exercice 1. *Et boum.*

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x.$

Indications : procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse, déterminer l'expression, pour $x \in \mathbb{R}$, de $f(1-x) + (1-x)f(x)$.

Exercice 2.

Résoudre à l'aide du pivot de Gauss les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ \frac{x}{2} - y - z = -\frac{1}{3} \\ \frac{x}{6} + y + \frac{z}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y - 2z = 3 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 7y - 7z = 3 \end{cases}, \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + 2y - 2z = 3 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 7y - 7z = 6 \end{cases}.$$

Exercice 3.

Résoudre à l'aide du pivot de Gauss les systèmes : $\begin{cases} x + y + z + 2t = 7 \\ x + 2y + 3z + 3t = 12 \\ x + y + z - t = 1 \\ x - y - 3z - t = -5 \end{cases}$ et $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 4x + 3y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$.

Opérations élémentaires sur les matrices

Exercice 4. *Inversion.*

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui les inverser. Sinon, donner leur rang.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \vdots & & & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \dots & n^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. *Décomposition J_r.*

On considère la matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Déterminer l'entier r et un couple de matrices (P, Q) telles que $PHQ = J_r$.

Déterminer un autre couple (P, Q) convenable.

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_i \leftarrow \frac{1}{2} L_i}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & (0) & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & \ddots & & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 5/2 \\ (0) & & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$\boxed{1}$

rpl

Si $ad - bc \neq 0$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ a une unique sol.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \end{cases}$$

<u>Analyse</u> Considérons une fonction f convenable

Soit $t \in \mathbb{R}$. En particularisant l'éq pour $x = t$ on obtient

$$f(t) + t f(1-t) = 1 + t$$

- - - - - - - - - - - - - - $x = 1 - t$ - - -

$$(1-t) f(t) + f(1-t) = 2 - t$$

EX$^{\underline{M}}$ OPEL

$\boxed{2/1}$

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ \frac{x}{2} - y - z = -\frac{1}{3} \\ \frac{x}{6} + y + \frac{z}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 & \\ 3x - 6y - 6z = -2 & L_2 \leftarrow 6L_2 \\ x + 6y + 2z = 3 & L_3 \leftarrow 6L_3 \end{cases}$$

déjà échelonné :sioux:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 & \\ -15y - 12z = -8 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 3y = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

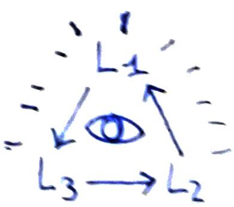
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ z = \left(-8 + \frac{15}{3}\right)\frac{-1}{12} = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{2/2}$

$$\begin{cases} y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -3 \\ x - y + 2z = 4 \\ y + z = 3 \end{cases}$$



$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 3 & L_1 \\ \quad -5y + 5z = -3 & L_2 \\ \qquad\quad 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = 2 + \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 9/5 \\ 2 + \frac{3}{5} \\ z \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\}$$

remq

Si on change un second membre, les OEs ne changent pas

$\boxed{2/3}$

pareil que 2/4 :
$$\begin{cases} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots 0 = -3 \end{cases} \qquad S = \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x + 2y - 3z = -3 & L_1 \\ -3y + 5z = 7 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y + z = 3 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + 2y - 3z = -3 & L_1 \\ y + z = 3 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -3y + 5z = 7 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + 2y - 3z = -3 & L_1 \\ y + z = 3 & L_2 \\ 8z = 16 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + 2y - 3z = -3 & L_1 \\ y + z = 3 & L_2 \\ z = \frac{16}{8} & L_3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = 1 & L_1 \\ y = 1 & L_2 \\ z = 1 & L_3 \end{array}\right.$$

$\boxed{2/4}$

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 2z = 3 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 7y - 7z = 6 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + 2y - 2z = 3 & L_1 \\ -5y + 5z = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 5y - 5z = 3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

EXMOPEL

4/C

$$\begin{pmatrix} 1 & & (1) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$ matrice triangulaire

$$\left(\begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \vdots \\ L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n}}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & 1 \end{matrix}\right)$$

d'où $$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

4/G

On développe / 2^e ligne

$\det G = -2 \neq 0$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right)$$

$\boxed{4/F}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -13 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -13 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

EXM OPEL

$\boxed{5}$

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_3}}{\tilde{L}}
\begin{array}{ccccccc}
2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 1 \\
 & & & 1 & & (0) & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & & & (0) & & & 1
\end{array}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\tilde{L}}
\begin{array}{ccccccc}
2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
-2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
-2 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 & 0 \\
 & & & 1 & & (0) & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & & & (0) & & & 1
\end{array}$$

$$\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\tilde{C}}
\begin{array}{ccccccc}
2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
-2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & -1 & -1 & 0 \\
 & & & & \ddots & (0) & \\
 & & & (0) & & & 1
\end{array}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}}{\tilde{L}}
\begin{array}{ccccccc}
6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -6 & 4 & 0 & — & — & 0 \\
 & & & 1 & -1 & -1 & 0 \\
 & & & & \ddots & (0) & \\
 & & & (0) & & & \ddots
\end{array}$$

C_1
$C_2 \to C_4$

En notant $\begin{cases} X = f(t) \\ Y = f(1-t) \end{cases}$

(X, Y) est solution de $\begin{cases} X + tY = 1+t \\ (1-t)X + Y = 2-t \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1-t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t + t^2$ est un trinôme de discriminant $\Delta = -3$

donc $1 - t + t^2 \neq 0$ dans $\mathbb{R}$.

On a donc une unique solution

$$\begin{cases} X = \dfrac{\begin{vmatrix} 1+t & t \\ 2-t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1-t & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 - t + 1} = 1 \\ Y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1+t \\ 1-t & 2-t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1-t & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{(2-t)-(1-t^2)}{t^2 - t + 1} = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 - t + 1} = 1 \end{cases}$$

donc $X = f(t) = 1$

et ceci est vrai pour tout réel t $f \in \{t \mapsto 1\}$

Synthèse ok.