Opérations élémentaires

I Sur un système linéaire

1 Définition

def Système linéaire à p équations et q inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p & (L_p) \end{cases}$$

où $x_1, \dots, x_q$ sont les inconnues du système et les $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sont appelées coefficients du système

Une solution du système et un q-uplet $(x_1, \dots, x_q)$ pour lequel les p équations sont satisfaites

ex

$$\begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$ est un système $\underset{2\text{éq.}}{2} \times \underset{2\text{inc.}}{2}$

Résolvons-le

Meth 1 Par substitution

$$2x+y=4 \Leftrightarrow y=4-2x$$

Sachant alors $5x-3y=-1 \Leftrightarrow 5x-3(4-2x)=-1$

$$\Leftrightarrow 11x=-1+12 \Leftrightarrow x=1$$

On réinjecte:

$$y=4-2x=4-2=2$$

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Meth 2 Par CLs

$$L_1+3L_2 \Leftrightarrow 11x=11 \Leftrightarrow x=1$$

$$2L_1-5L_2 \Leftrightarrow (-6-5)y=-2-20 \Leftrightarrow -11y=-22 \Leftrightarrow y=2$$

Réciproquement: OK.

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

<u>remq</u>

Par définition du produit matriciel

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1q}x_q=b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{p1}x_1+\cdots+a_{pq}x_q=b_q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

ex

$$\begin{cases} 5x - 3y = -1 & (L_1) \\ 2x + y = 4 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{5 \cdot 1 - 2 \cdot (-3)}_{11} \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Le système équivaut à

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

remq

On dit que le système linéaire est homogène lorsque $b_1 = \cdots = b_y = 0$ (beurk)

À tout SL[1] on peut associer un SLH[2], obtenu en remplaçant le second membre $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

def Opérations élémentaires sur un SL de p équations $L_1, \dots, L_p$

1 Permutation

$L_i \longleftrightarrow L_j$

2 Transvection

$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j \qquad (i \neq j)$

3 Dilatation

$L_i \longleftarrow \mu L_i \qquad (\mu \neq 0)$

thm

Effectuer une OE[3] sur une SL ne change pas l'ensemble des solutions

---

[1] Système linéaire [2] SL Homogène [3] Opération élémentaire

2 Algorithme du pivot de Gauss

def SL échelonné

Chaque équation non-nulle du système a pour première inconnue (i.e. non-multipliée par 0) x_i

ex

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & 2t & = & 1 \\ & & & & 4z & - & t & = & 2 \\ & & & & & & t & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

est échelonné

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & & & & z & + & t & = & 2 \end{array}\right.$$

est échelonné

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ & & & & z & + & 2t & = & 2 \\ & & & & z & - & t & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

n'est pas échelonné

remq

Un système échelonné est essentiellement résolu !

ex

1. $$\left\{\begin{array}{l} x + \boxed{2y} + 3z + 2t = 1 \\ 4z - t = 1 \\ t = 1 \\ \cancel{0 = 0} \\ \cancel{0 = 0} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 2y - 3z - 2t \\ z = \frac{2+t}{4} \\ t = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2y + 1 - \frac{9}{4} - 2 = -2y - \frac{13}{4} \\ z = \frac{3}{4} \\ t = 1 \end{array}\right.$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2y - \frac{13}{4} \\ y \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R} \right\}$$

2. $$\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ y + z + t = 1 \\ z + t = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -y - z - t = 1 - (2 - t) - t = -1 \\ y = 1 - z - t = -1 \\ z = 2 - t \end{array}\right.$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

3. $$\begin{cases} x + y + z + 2t = 1 & (L_1) \\ z + 2t = 2 & (L_2) \\ z - t = 1 & (L_3) \end{cases}$$

n'est pas échelonné mais on peut le rendre échelonné en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2t = 1 & (L_1) \\ z + 2t = 2 & (L_2) \\ -3t = -1 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z - 2t = -y - 1 \\ z = 2 - 2t = \frac{4}{3} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -y-1 \\ y \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R} \right\}$$

Algorithme du Pivot de Gauss

idée On effectue des OE sur le SL jusqu à obtenir un SL élaboré.

méth Pour résoudre $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1q} = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pq} = b_p \end{cases}$

1. On cherche un coefficient $a_{i1} \neq 0$ le plus simple possible (dans l'idéal 1)

   si on n'en trouve pas

   $\rightarrow$ 3.

   sinon

   $$L_i \leftrightarrow L_1$$

2. Pour $2 \leq i \leq p$ on effectue l'OE

   $$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$$

   On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ \boxed{\begin{array}{l} a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_q \end{array}} \end{array}\right.$$

que des 0

3. On recomence sur le sous-système obtenu d'inconnues $x_2, \dots, x_q$

thm

L'algorithme de Gauss termine et est correct

(i.e. il échelonne le SL)

ex

$$S : \begin{cases} y - 2z + t = 0 & (L_1) \\ 2x + y - 3z + 2t = -2 & (L_2) \\ -x + 2y - 3t = -1 & (L_3) \\ 1x + z - t = 1 & (L_4) \end{cases}$$

Etape 1 $L_1 \leftrightarrow L_4$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} x + z - t = 1 & (L_1 \leftrightarrow L_4) \\ 2x + y - 3z + 2t = -2 & (L_2) \\ -x + 2y - 3t = -1 & (L_3) \\ y - 2z + t = 0 & (L_4 \leftrightarrow L_1) \end{cases}$$

Etape 2 $L_2 \leftarrow \cdot L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} x + z - t = 1 & L_1 \\ y - 5z + 4t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y + z - 4t = -1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ y - 2z + t = 0 & L_4 \end{cases}$$

Etape 3-1 $\emptyset$

Etape 3-2

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} x - t = 1 & \\ y - 5z + 4t = 0 & \\ 11z - 12t = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ z - t = 0 & L_4 \leftarrow \frac{L_4 - L_2}{3} \end{cases}$$

Etape 4-1

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl}
x & & & -t & = & 1 & L_1 \\
 & y & +5z & +4t & = & 0 & L_2 \\
 & & z & -t & = & 0 & L_3 \leftrightarrow L_4 \\
 & & 11z & -12t & = & -1 & L_4 \leftrightarrow L_3
\end{array}\right.$$

Étape 4 – 2

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl}
x & & & -t & = & 1 & L_1 \\
 & y & +5z & +4t & = & 0 & L_2 \\
 & & z & -t & = & 0 & L_3 \\
 & & & -t & = & -1 & L_4 \leftarrow L_4 - 11L_3
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}
x = 2 \\
y = -5-4 = \\
z = 1 \\
t = 1
\end{array}\right.$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

II Sur les matrices

1 Définition et interprétation

def

$$M := \begin{pmatrix} — L_1 — \\ \vdots \\ — L_p — \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_q \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

Une OE sur M est :

1. Permutation
   $L_i \longleftrightarrow L_j$
   $C_i \longleftrightarrow C_j$
2. Transvection
   $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \qquad i \neq j$
   $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$
3. Dilatation
   $L_i \leftarrow \mu L_i \qquad \mu \neq 0$
   $C_i \leftarrow \mu C_i$

thm Interprétation en terme de produit matriciel

Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et M' obtenue par OE de M.

Sur les lignes :

1^L. Pour une permutation :

$$M' = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & i & & j & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & \vdots & 1 \ddots 1 & \vdots & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \times M = (I_p - E_{jj} - E_{ii} + E_{ij} + E_{ji}) \times M$$

2^L. Pour une transvection

$$M' = \left(\begin{array}{c|cccc} & & & j & \\ \hline & 1 & & & \\ i & & \ddots & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right) \times M = (I_p + \lambda E_{ij}) \times M$$

3.^{L} Pour une dilatation

$$M' = \left(\begin{array}{c|ccccc} & & & i & & \\ \hline & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ i & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right) \times M = (I_p + (\mu - 1)E_{ii})\, M$$

Sur les colonnes

1.^{C} Pour une permutation

$$M' = M \times \left(\begin{array}{c|ccccccccc} & & & & i & & & j & & \\ \hline & 1 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ i & & & & 0 & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ j & & & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{array}\right) = M \times (I_q - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})$$

2.^{C} Pour une transvection

$$M' = M \times \left(\begin{array}{c|cccc} & & & i & \\ \hline & 1 & & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & \\ j & & & \lambda & \ddots \\ & & & & 1 \end{array}\right) = M \times (I_q + \lambda E_{ji})$$

3.^{C} Pour une dilatation

$$M' = M \times \left(\begin{array}{c|ccccc} & & & i & & \\ \hline & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ i & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right) = M \times (I_q + (\mu - 1)E_{ii})$$

def Matrices échelonnées

1 Matrice **échelonnée par ligne** : chacune de ses lignes non nulles commencera par strictement plus de zéros que la précédente

2 Matrice **échelonnée par colonne** : ${}^tM$ est échelonnée par ligne

2 Matrices associées à un SL

def

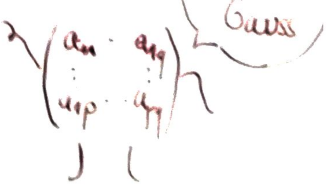
À un SL
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pq}x_q = b_q \end{cases}$$
on peut associer deux matrices :

- La matrice de coefficients $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$

- La matrice étendue $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & b_q \end{pmatrix}$

remq Gauss peut se présenter matriciellement

l'algorithme de, ducon.



$$\begin{cases} \phantom{2x +{}} y - 2z + t = 0 \\ 2x + y - 3z + 2t = 2 \\ -x + 2y \phantom{{}- 3z} - 3t = -2 \\ x \phantom{{}+y} + z - t \quad 1 \end{cases}$$

Matriciellement:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 & & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 & & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -4 & & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 & & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -4 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 & & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -9 & & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{5}{7}L_3}{\underset{L}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow \frac{7}{3}L_4}{\underset{L}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Arrivé là, on peut reécrire le système

$$\begin{cases} -x + 2y \qquad\qquad - 3t = -2 \\ \qquad\quad y - 2z + t = 0 \\ \qquad\qquad\quad 7z - 9t = -2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad t = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Mais on peut aussi remonter l'algo. de Gauss i.e. faire apparaître des zéros partout sauf sur la diag.

$$*) \quad \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 9L_4}}{\underset{L}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{7}L_3}{\simeq} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2+2L_3}{\simeq} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow 2L_2 - L_1$

Ce qui donne <u>directement</u>

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

3 Inversion de la matrice

<u>meth</u> Calculer l'inverse d'une matrice inversible A

On applique Gauss sur les lignes à la matrice étendue:

$$(A \,\vdots\, I_n) \underset{OE}{\simeq} (\quad \vdots \quad) \underset{OE}{\simeq} \cdots \underset{OE}{\simeq} (I_n \,\vdots\, A^{-1})$$

remq

Pour inverser A on peut aussi augmenter A par I_n à gauche avant d'effectuer des OE sur les lignes:

$$\left(I_n \;\vdots\; A\right) \underset{L}{\sim} \left(A^{-1} \;\vdots\; I_n\right)$$

remq

On peut aussi augmenter A en dessous ou au dessus

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I_n \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} I_n \\ \hdashline A^{-1} \end{pmatrix}$$

ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\tilde{C}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{C_3 \leftarrow -C_3 + 3C_2}{\underset{C}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4 Et quand ça ne marche pas ?

obj Quantifier le défaut d'inversibilité

thm-def

Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. r le nombre de lignes $\neq 0$ à la fin de l'algorithme du pivot de Gauss sur les lignes.

2. r ———— colonnes $\neq 0$ ————
———— colonnes

ex

1. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $rg(M) = n$

2. $sg\, M = 0 \Longleftrightarrow M = ((0))$

ex $sg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$$
$$C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1$$

donc $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} = 1$

thm

Une OE ne modifie pas le rang.

5 Décomposition $PMQ = J_r$

def

Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On note $J_{p,q,r}$ (ou J_r) la matrice

$$\underset{\xleftrightarrow[q]{\hspace{4cm}}}{r\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right. \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}^{r} & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}} \Bigg\updownarrow p$$

ex

1. $p=2$, $q=3$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $p=3$, $q=2$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

remq

$${}^tJ_{p,q,r} = J_{q,p,r}$$

thm

Soit M une matrice de rang r.
Alors il existe $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ inversible et $Q \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ inversible telles que

$$PMQ = J_r$$

Algorithme de détermination :

$$\begin{matrix} I_p & M \\ (0) & I_q \end{matrix} \xrightarrow[\text{OEs sur \underline{lignes} \& \underline{colonnes}}]{} \begin{matrix} P & J_r \\ (0) & Q \end{matrix}$$

□

TACMAS
ERMINÉ