Fonctions "mieux que dérivables"

Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 1. *Régularité ?*

Étudier la régularité[1] de : $x \mapsto \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$, $x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 2. *Un théorème de Rolle à l'ordre n ?*

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a<b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$. On suppose $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$ et $f(b)=0$.

Montrer qu'alors il existe $c \in \left]a,b\right[$ tel que $f^{(n)}(c)=0$.

Formules de Taylor globales

Exercice 3. *Limites*

Donner (avec démonstration !) les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, où x est un réel quelconque.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}x^{k}$, où $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Exercice 4. *Approximations*

En procédant comme dans le cours (ou autrement) :

1. On admet qu'on sait déjà qu'on a $2<\mathrm{e}<3$. Donner une approximation rationnelle de e à 10^{-12} près.
2. Donner une approximation rationnelle de $\ln(2)$ à 10^{-12} près.
3. On admet qu'on a, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\arctan^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^n}\sin\left(n\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ (une récurrence pénible mais sans astuce en vient à bout). Donner une approximation rationnelle de π à 10^{-12} près.

On pourra les écrire sous forme d'horribles sommes, et elles pourront être "non optimales", mais montrer qu'elles conviennent bien.

4. Vérifier vos résultats avec Python.

Développements limités pathologiques

Exercice 5. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Donner, pour tout entier n, le $DL_n(0)$ de la fonction nulle.
2. Montrer que, pour tout entier n, f a un $DL_n(0)$ que l'on précisera.
3. Que nous enseigne cet exemple ?

Exercice 6. On considère la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}\sin\left(\mathrm{e}^{1/x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout entier n, g a un $DL_n(0)$ que l'on précisera[2].
2. En déduire que g est dérivable puis calculer g'.
3. Pour quelles valeurs de n la fonction g' a-t-elle un $DL_n(0)$?
4. Que nous enseigne cet exemple ?

1. La fonction est-elle continue ? Si oui, est-elle dérivable ? Si oui, est-elle $\mathcal{C}^1$? Si oui, est-elle D^2 ? Si oui, est-elle $\mathcal{C}^2$? Etc.
2. On pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

Développements limités sympathiques

Exercice 7. *Encore des développements limités*

Donner les développements limités des fonctions suivantes au point et à l'ordre considéré :

1. $DL_4\,(-\infty)$ de $x \mapsto \arctan(x)$ (déjà vu, mais **à retenir** !)
2. $DL_3\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $x \mapsto \cos(x)$
3. $DL_3(1)$ de $x \mapsto 3^x$

Exercice 8. *Développement limité d'une fonction réciproque.*

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$ est bijective.
2. En notant f^{-1} sa bijection réciproque, justifier que f^{-1} a un développement limité en 0 à tout ordre.
3. Déterminer le développement limité en 0 et à l'ordre 5 de f^{-1}.

$\boxed{1/1}$

$\lim\limits_{0} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \cdot \ln = 0$ par CC

On a $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$

$\begin{cases} \lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{0^-} 0 = 0 = f(0) \\ \lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{0^+} 0 = 0 = f(0) \end{cases}$ par CC

donc $f \in \mathcal{C}(\{0\}, \mathbb{R})$.

Mq $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} x^2$
$= 2x \ln(x) + x$

$\forall x \in \mathbb{R}^*_-$, $f'(x) = 0$

$\begin{cases} \lim\limits_{0^-} f' = 0 \\ \lim\limits_{0^+} f' = 0 \end{cases}$ par CC

Mq $f \notin \mathcal{D}^2$ avec le TLD.

$f' = 2\mathrm{id} \cdot \ln + \mathrm{id} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$

Pour $x > 0$, $f''(x) = 2 \cdot \ln x + 2 + 1 = 2\ln(x) + 3 \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

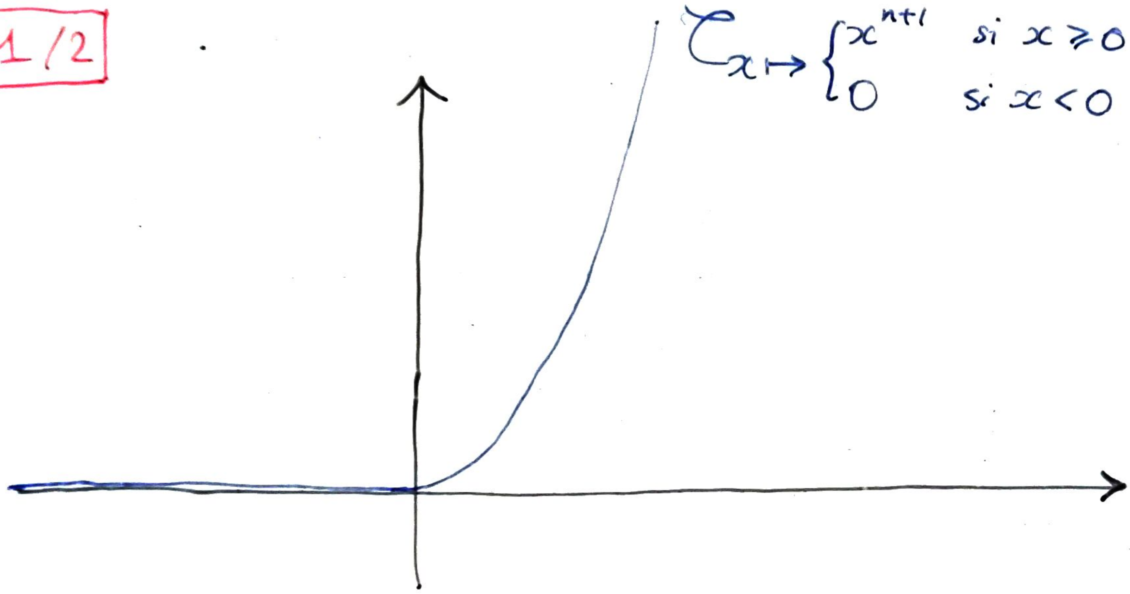
d'où

$$\tau_{0,f}(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty \qquad \text{par TLD}$$

En particulier, sa dérivée n'est pas dérivable en 0 donc n'est pas $\mathcal{D}^2$

On a $f \in \mathcal{C}^1 \cap {}^c\mathcal{D}^2$

$\boxed{1/2}$



g_n est le prolongement continu à $\mathbb{R}$ de

$$x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \dfrac{d^k}{dx^k}(0) = 0 \\ \dfrac{d^k}{dx^k}\left(x^{n+1}\right) = (n+1)n(n-1)\cdots(n+2-k)x^{n+1-k} \end{cases}$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\lim_{0^-} g^{(k)} = \lim_{0^-} x \mapsto 0 = 0$$

$$\lim_{0^+} g^{(k)} = \lim_{0^+} (n+1)\cdots(n+2-k)\,id^{n+1-k} = 0$$

donc $\lim\limits_{0} g^{(k)} = 0$

donc $g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par thm de prolongement $\mathcal{C}^k$.

Mq $g \notin \mathcal{D}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\lim_{0^+} \tau_{g^{(n)},0} &= \lim_{0^+} \frac{n!\,id - 0}{id - 0} \\ &= \lim_{0^+} (n+1)! \\ &= (n+1)! \\ &\neq 0 \\ &= \lim_{0^-} \tau_{g^{(n)},0}\end{aligned}$$

Donc $g^{(n)} \notin \mathcal{D}(\{0\}, \mathbb{R})$

$\boxed{1/3}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} h(x) = 1 \neq h(0) \Rightarrow h \notin \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

EXNMQDERIV

$\boxed{2}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a<b \in \mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$

Supposons $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f(b) = 0$

On a $\begin{cases} f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R}) \\ f(a) = f(b) \end{cases}$

alors il existe $b_1 \in]a,b[$ tel que

$f'(b_1) = 0$. On a:

$\begin{cases} f' \in \mathcal{C}([a,b_1],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b_1[,\mathbb{R}) \\ f'(a) = f'(b_1) \end{cases}$

alors il existe $b_2 \in]a,b_1[$ tel que

$f''(b_2) = 0$.

$\vdots$ par récurrence immédiate

$f^{(n-1)} \in \mathcal{C}([a,b_{n-1}],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b_{n-1}[,\mathbb{R})$

donc il existe $c \in]a,b_{n-1}[\subset]a,b[$ tel que

$f^{(n)}(c) = 0$

EX □ MIEUX DERIV

$\boxed{3/1}$

Posons $\begin{cases} f = \sin \\ a = 0 \end{cases}$

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\sin \in \mathcal{C}^{2n+1}([0,x], \mathbb{R})$$

Donc d'après l'ITL,

$$\left|\sin x - T_{2n+1}(x)\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+2)!} \underbrace{\sup_{[0,x]} \left|\sin^{(2n+2)}\right|}_{\leq 1}$$

$$\leq \underbrace{\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+2)!}}_{\longrightarrow 0} \quad \text{par CC}$$

$$T_{2n+1} \xrightarrow[+\infty]{} \sin \quad \text{par TdG}$$

$\boxed{3/2}$

Posons $\begin{cases} f = -\ln \circ (1 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \\ a = 0 \end{cases}$

$$T_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n} x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x^k$$

$f \in \mathcal{C}^{n+1}([0, x], \mathbb{R})$

d'après l'ITL,

$$|f(x) - T_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,x]} |f^{(n+1)}|$$

car $\ln^{(n+1)} = \dfrac{(-1)^n n!}{\mathrm{id}^{n+1}}$

d'où $f^{(n+1)} = \dfrac{(-1)^{n+1} n!}{(1+\mathrm{id})^{n+1}}$

ie $|f^{(n+1)}| = \dfrac{n!}{(1+\mathrm{id})^{n+1}}$

$$\sup_{[0, x]} |f^{(n+1)}| = |f^{(n+1)}|(0) \quad \text{car } |f^{(n+1)}| \in \supset$$
$$= n!$$

donc $|f(x) - T_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

donc $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x^k \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) = -\ln(1+x)$

<u>Cas particulier</u>

$x = \frac{1}{2}$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k 2^k} \xrightarrow[n \to \infty]{} \ln \frac{2}{3}$

$\boxed{4/1}$ $2 < e < 3$.

Posons $\begin{cases} f = \exp \\ a = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a bien

$$\exp \in \mathcal{C}^n([0,1], \mathbb{R})$$

donc d'après l'ITL[1]

$$|e - T_n(1)| \leq \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,1]} |\exp^{(n+1)}|$$

ie $$\left|e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot e \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

On cherche n tel que

$$\frac{3}{(n+1)!} \leqslant 10^{-12}$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+1)! \geqslant 3 \cdot 10^{12}$$

Une approx convenable

$$\sum_{k=0}^{15} \frac{1}{k!} \in \mathbb{Q}$$

---

[1] Inégalité de Taylor–Lagrange

$\boxed{4/2}$

$$\ln 2 = \ln(1+1)$$

$$\begin{cases} f = \ln \circ (1+\mathrm{id}) \\ a = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}^{n+1}([0,1], \mathbb{R})$ donc d'après l'ITL

$$\left| \ln 2 - T_n(1) \right| \leq \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,1]} \left| \frac{(-1)^n n!}{(1+\mathrm{id})^{n+1}} \right|$$

$$= \frac{\cancel{1^{n+1}}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\cancel{1^{n+1}}}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

On a $\frac{1}{n+1} \geqslant 10^{-12}$

ie $n+1 \geqslant 10^{12}$

ie $n \geqslant 10^{12} - 1$ = "9" * 12

<u>Conclusion</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^{12}-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est une approx à 10^{-12} près de $\ln 2$

4/3

$$\operatorname{atan} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Cherchons une approx à $\frac{10^{-12}}{4}$ près de atan 1.

Posons $\begin{cases} f = \operatorname{atan} \\ a = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$$\operatorname{atan} \in \mathcal{C}^{n+1}([0,1], \mathbb{R}).$$

d'après l'ITL,

$$\left| \operatorname{atan} 1 - T_n(1) \right| \leqslant \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,1]} \left| \operatorname{atan}^{(n+1)} \right|$$

$$T_n(1) = \begin{cases} 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} + \cdots + (-1)^p \frac{1^{2p+1}}{2p+1} & \text{si } n = 2p+1 \\ 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{1^{2p-1}}{2p-1} & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sup_{[0,1]} \left| \operatorname{atan}^{(n+1)} \right| &= \sup_{[0,1]} \left| \frac{(-1)^n n!}{(\sqrt{1+\mathrm{id}^2})^{n+1}} \sin \circ \left((n+1) \operatorname{atan} \circ \frac{1}{\mathrm{id}} \right) \right| \\ &= \sup_{[0,1]} \left| \frac{n!}{(1+\mathrm{id}^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \sin \circ \left((n+1) \operatorname{atan} \circ \frac{1}{\mathrm{id}} \right) \right| \\ &\leqslant n! \sup_{[0,1]} \underbrace{\frac{1}{(1+\mathrm{id}^2)^{\frac{n+1}{2}}}}_{\in \supset} \\ &= n! \end{aligned}$$

D'où $\left|\frac{\pi}{4} - T_n(1)\right| \leq \frac{1}{n+1}$

On cherche n tel que $\frac{1}{n+1} \leq \frac{10^{-12}}{4}$

ie $n \geq 4 \cdot 10^{12} - 1$

$= 2(2 \cdot 10^{12} - 1) + 1$

Une approximation rationnelle à $\frac{10^{-12}}{4}$ de $\frac{\pi}{4}$ est

$$\sum_{k=0}^{2 \cdot 10^{-12} - 1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Donc une approximation rationnelle de π à 10^{-12} près

$$\sum_{k=0}^{2\, 10^{-12} - 1} \frac{4(-1)^k}{2k+1}$$

Cherchons une approximation à $\frac{10^{-12}}{8}$ près de $\operatorname{atan} \frac{1}{2}$ et une approximation à $\frac{10^{-12}}{8}$ près de $\operatorname{atan} \frac{1}{3}$

On applique l'ITL à $\begin{cases} f = \operatorname{atan} \\ a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

On a bien $\operatorname{atan} \in \mathcal{C}^{n+1}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ donc

$$\left|\operatorname{atan} \frac{1}{2} - T_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0, \frac{1}{2}]} \left|\operatorname{atan}^{(n+1)}\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\leq \frac{10^{-12}}{8}$$

$$\Leftrightarrow n \ln \frac{1}{2} \leq \ln(10^{-12}) - \ln 8$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{+\ln 8 + 12 \ln(10)}{+\ln 2}$$

$$\boxed{n = 43 \quad \text{convient}}$$

Par raisonnement analogue ($2 \rightsquigarrow 3$)

$\boxed{n = 28 \quad \text{convient}}$ (mais aussi $n = 43$

Une approx de π à 10^{-12} près est

$$4 \sum_{k=0}^{21} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{3^{2k+1}} \right).$$

$$\ln 2 = -\ln \frac{1}{2} = -\ln\left(1 + \frac{-1}{2}\right)$$

On a déjà vu que pour $\begin{cases} f = \ln \circ (1 + id) \\ a = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\left| \ln(1+x) - T_n(x) \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[x,0]} \left| \frac{(-1)^n n!}{(1+id)^{n+1}} \right| \text{ car } f \in \mathcal{C}^{n+1}([x,0], \mathbb{R})$$

ie $\left| -\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(-2)^k k} \right| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

ie $\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k 2^k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$

$$\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k2^k}$$

Or $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k}$

$\leq \frac{1}{2^n}$ (géométrique)

donc $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k2^k} < \frac{1}{2^n}$

On cherche n tel que $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{10^{12}}$

$\Leftrightarrow 2^n \geq 10^{12}$

Or $2^{10} > 10^3$

donc $2^{40} > 10^{12}$

$\boxed{n = 40 \text{ convient}}$

$\boxed{5/1}$

$$0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n + o(x^n)$$
$$= o(x^n)$$

$\boxed{5/2}$

Meth 1 Avec le prolongement $\mathcal{C}^\infty$

Meth 2

$$\lim_{0^+} \frac{1}{\mathrm{id}^n} f = \lim_{0^+} \frac{\exp \circ \left(-\frac{1}{\mathrm{id}^2}\right)}{\mathrm{id}^n}$$

$$X := \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{X}} \Rightarrow x \to 0^+ \Leftrightarrow X \to \infty$$

$$L := \lim_{X \to \infty} e^{-X} X^{\frac{n}{2}} = 0 \quad \text{par CC}$$

Donc $f(x) = o(x^n)$, donc f a un $DL_n(0)$ $o(x^n)$

$\boxed{5/3}$

Deux fonctions peuvent avoir un même DL mais être différentes sur tout voisinage de 0

6/1

$$g := \begin{cases} f \cdot \sin \circ \exp \circ \left(\frac{1}{\mathrm{Id}^2}\right) & \text{sur } \mathbb{R}^* \\ x \mapsto 0 & \text{sur } \{0\} \end{cases}$$

$$\lim_0 \frac{g}{\mathrm{Id}^n} = \lim_0 \frac{f \cdot \sin \circ \exp \circ \left(\frac{1}{\mathrm{Id}^2}\right)}{\mathrm{Id}^n}$$

$$= 0 \qquad \text{car } -1 \leq \sin \circ \exp \circ \left(\frac{1}{\mathrm{Id}^2}\right) \leq 1$$

par TdG

donc $DL_n(0)$: $g(x) = o(x^n)$

6/2

En particulier, g a un $DL_1(0)$ qui est

$$g(x) = o(x) = a + bx + o(x)$$
$$= 0 + \underbrace{0}_{g'(0)} x + o(x)$$

d'après le lien $\mathcal{D}$–DL

Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g \in \mathcal{D}$ par théorème généraux

et $g' = \sin \circ e^{\frac{1}{\mathrm{Id}^2}} \cdot \frac{-2}{\mathrm{Id}^3} + e^{-\frac{1}{\mathrm{Id}^2}} \cos \circ e^{\frac{1}{\mathrm{Id}^2}} \cdot \frac{-2}{\mathrm{Id}^3} e^{\frac{1}{\mathrm{Id}^2}}$

$$= x \mapsto \underbrace{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin e^{\frac{1}{x^2}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2}{x^3} \cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)}_{\text{PDL}}$$

6/3

g' n'a pas de limite en 0 donc $g' \notin \mathcal{C}$

donc g' n'a de DL à aucun ordre. Alors que g a un DL à tout ordre

$\boxed{6/4}$ Il existe g qui a un DL à tout ordre tel que g' n'a de DL à aucun ordre.

$\boxed{7/1}$ Notons $h = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{h}$.

$h < 0$ donc $\operatorname{atan}(h) + \operatorname{atan}\frac{1}{h} = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{atan}\frac{1}{h} = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{atan} h$

$h \to 0 \Rightarrow$ on peut faire un DL

$$\operatorname{atan}\frac{1}{h} = -\frac{\pi}{2} - h + \frac{h^3}{3} + o(h^4)$$

ie $\operatorname{atan} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$\boxed{7/2}$ Posons $h = x - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = h + \frac{\pi}{3}$

$$\cos x = \cos\left(h + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos(\underset{\to 0}{h}) \cos\frac{\pi}{3} - \sin(\underset{\to 0}{h}) \sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) - \sin\frac{\pi}{3}\left(h - \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} h - \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} h^3 + o(h^3)$$

$\boxed{7/3}$ Notons $h = x - 1 \Leftrightarrow x = h + 1$

$3^x = 3^{h+1} = 3 \cdot 3^h = 3 e^{\overbrace{\ln 3\, h}^{\to 0}}$ donc on peut faire

$$= 3\left(1 + h\ln 3 + \frac{(h\ln 3)^2}{2} + \frac{(h \ln 3)^3}{6}\right) + o(h^3)$$

EXM MQ DERIV

$\boxed{8/1}$

On a $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par thm généraux

$$f' = \exp \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 (\exp \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2) > 0$$

donc par TSD, $f \in \nearrow(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \exp \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow[+\infty]{} -\infty$$

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \exp \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow[-\infty]{} +\infty$$

Par thm de la bijection,

$$f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$\boxed{8/2}$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- f' ne s'annule pas.

D'après un théorème du cours,

$$f^{-1} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

D'après Taylor-Young, f^{-1} a un $DL_n(0)$.