Fonctions "mieux que dérivables".

Contexte : dans tout le chapitre

- I désigne une réunion d'intervalles non triviaux ;
- f désigne une application de I dans $\mathbb{R}$, sauf mention du contraire.

I Dérivées d'ordre supérieur

I.1 Définitions

Définition 1 .

1. f est dite n fois dérivable lorsque f', f'', ..., $f^{(n)}$ existent ;
2. f est dite n fois continûment dérivable lorsque f', f'', ..., $f^{(n)}$ existent et $f^{(n)}$ est continue ;
3. f est dite indéfiniment dérivable lorsque pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ existe.

Notation 1

1. Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$;
2. pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois continûment dérivables de I dans $\mathbb{R}$;
3. on note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1

- Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) = \left\{f',\ f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})\right\}$ et, si $n \geqslant 1$, $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R}) = \left\{f',\ f \in \mathcal{D}^{n+1}(I,\mathbb{R})\right\}$.
- La tradition veut qu'on note $\mathcal{D}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble $\left\{f',\ f{\in}\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})\right\}$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont des dérivées.

Exemples 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on connaît les dérivées n^e des fonctions usuelles :

$f(x)$	x^α	$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)\quad(n \geqslant 1)$	$e^{\alpha x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$f^{(n)}(x)$	$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$	$\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$	$\alpha^n e^{\alpha x}$	$\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

Application 1 Rappel : pour $n \in \mathbb{N}$, on sait calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $x \mapsto \sin(x)e^x$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x)e^x = \operatorname{Im}(e^{ix}e^x)\\
f^{(n)}(x) &= \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{x(1+i)}\right)\right)\\
&= \operatorname{Im}((1+i)^n e^{x(1+i)})\\
&= \operatorname{Im}(2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}n}e^x e^{ix})\\
&= 2^{\frac{n}{2}}e^x \operatorname{Im} e^{i(x+n\frac{\pi}{4})}\\
&= 2^{\frac{n}{2}}e^x \sin\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

I.2 Structure

Théorème 1 : propriétés de la n-dérivation.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f, g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$. Alors on a :

1. Linéarité : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$;
2. Leibniz : $fg \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ et $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$;
3. Faà di Bruno ~~light~~ per i bambini : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ x \mapsto f(\alpha x + \beta) \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ et $\big(x \mapsto f(\alpha x + \beta)\big)^{(k)} = x \mapsto \alpha^n f^{(n)}(\alpha x + \beta)$.

Plus généralement :

4. $\forall f \in \mathcal{D}^n(I, J),\ \forall g \in \mathcal{D}^n(J, \mathbb{R}),\ g \circ f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$;
5. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, J)$ bijective telle que f' ne s'annule pas, alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J, I)$ (pour I un intervalle).

Remarque : si on suppose plutôt $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, alors il en va de même pour $\lambda f + \mu g$, fg, $x \mapsto f(\alpha x + \beta)$, $f \circ g$ ou f^{-1}.

Démonstration. Le point 2. a déjà été démontré, les autres s'obtiennent par récurrence : exercice. □

Application 2 $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ sont des sous-algèbres de $(\mathbb{R}^I, +, \times, \cdot)$.

On a déjà vu beaucoup d'applications de la formule de Leibniz donc on n'y revient pas ici.

I.3 Prolongement $\mathcal{C}^n$

Théorème 2 : théorème de prolongement $\mathcal{C}^n$.

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^n(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $n+1$ réels $\ell_0, \ldots, \ell_n$ tels que $\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_0 \\ f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1 \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_n. \end{cases}$

Alors f est prolongeable par continuité sur I et son prolongement est $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

En notant encore f ce prolongement, on a $f(a) = \ell_0,\ f'(a) = \ell_1,\ \ldots,\ f^{(n)}(a) = \ell_n$.

Démonstration. Une simple récurrence à l'aide du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ donne directement le résultat. □

Application 3 Considérons de nouveau l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - 1}{x} = e^x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \end{array} \right.$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après Leibniz, f est n fois dérivable.
Sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^x \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}} - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \\ &= \frac{e^x n! (-1)^n}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! \cancel{(n-k)}!} \frac{(-1)^{-k} \cancel{(n-k)}!}{x^{-k}} - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \\ &= \frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}} \left(e^x \sum_{k=0}^{n} x^k - 1 \right) \end{aligned}$$

Or on sait qu'on a

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} + o(x^{n1})$$

Ici,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}\left(e^x\left(e^{-x}-\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}+o(x^{n+1})\right)-1\right) \\ &= \frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}\left(1+\frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^{n+1}e^x+o(\cancel{e^x}x^{n+1})-1\right) \\ &= \frac{e^x\cancel{(-1)^{2n}}}{n+1}+o(1) \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $n\in 0\leq n\leq k$ on a

$$f^{(n)} \underset{0}{\longrightarrow} \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^k$, f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ (telle que $\forall n\leq k,\ f_{\sim}^{(k)}(0)=\frac{1}{n+1}$) Ceci est vrai pour tout $k\in\mathbb{N}$ donc le prolongement est $\mathcal{C}^\infty$.

II Formules de Taylor

Remarque préliminaire : on va parler dans cette section de formules de Taylor en un point a, mais retenir le cas $a=0$ suffit, puisqu'un simple changement de variable permet de s'y ramener !

II.1 Contexte

Définition 2 .

Soient $a\in I$ et $f\in\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$.

1. On appelle polynôme de Taylor de f en a à l'ordre n le polynôme
$$T_n(X)=f(a)+f'(a)(X-a)+\frac{f''(a)}{2}(X-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$
2. On appelle reste de Taylor de f en a à l'ordre n l'application
$$R_n=x\mapsto f(x)-T_n(x)=x\mapsto f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Idée :
- $T_n(x)$ est l'expression qui apparaît dans le $DL_n(a)$ de f (s'il existe).
- On peut espérer que $T_n(x)$ constitue une approximation plus ou moins raisonnable de $f(x)$.
- $R_n(x)$ est l'erreur qu'on commet lorsqu'on approche $f(x)$ par $T_n(x)$.

Remarque : le polynôme et le reste de Taylor dépendent de n, mais aussi de f et de a. On devrait en toute rigueur écrire $T_{f,a,n}$ et $R_{f,a,n}$ si le contexte ne permettait pas de déterminer f et a sans ambiguïté.

Exemple 2 Pour $f=\cos$, $a=0$ et $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$T_n(x)=\begin{cases} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!}x^n & \text{si } n\in 2\mathbb{N} \\ 1-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)!}x^{n-1} & \text{si } n\in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$$

II.2 Taylor avec reste intégral

Théorème 3 : Formule de Taylor avec reste intégral.

Soient $n\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ et $f\in\mathcal{C}^{n+1}([a,x],\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^{n+1}([x,a],\mathbb{R})$). Alors on a

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{i.e.} \\ f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Remarque 2

L'égalité de Taylor avec reste intégral généralise donc le théorème fondamental de l'analyse.

Démonstration. En résumé, il s'agit essentiellement de faire une IPP. On procède par récurrence sur n.

• Initialisation : il s'agit de montrer que, pour tous réels a et x et toute fonction $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,x],\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^{n+1}([x,a],\mathbb{R})$), on a $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t$. C'est vrai d'après le théorème fondamental de l'analyse.

• Hérédité : supposons le résultat vrai au rang n. Montrons qu'il est alors vrai au rang $n+1$. Soit donc deux réels a et x et $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a,x],\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^{n+2}([x,a],\mathbb{R})$).
On a alors, en particulier, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,x],\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^{n+1}([x,a],\mathbb{R})$) et donc par hypothèse de récurrence :

$$f(x) = T_n(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t. \qquad \text{Posons } u = f^{(n+1)} \text{ et } v : t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Les applications u et v sont $\mathcal{C}^1$, on peut donc réaliser une IPP : $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$, $v'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$ et

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t &= \int_a^x u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_{t=a}^x - \int_a^x u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_{t=a}^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et par suite la propriété est bien héréditaire.

• La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Application 4 N'y a-t-il pas un air de déjà vu dans la démonstration précédente ?

Avec $\begin{cases} f &= \exp \\ a &= 0 \\ x &= 1 \end{cases}$, on a

$$\begin{aligned}
& e - T_n(1) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \\
\Leftrightarrow\ & e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \int_0^1 \underbrace{(1-t)^n e^t}_{\in[0,e]} dt \\
\implies\ & 0 \leq e - \sum \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n!} \\
\implies\ & \sum \frac{1}{k!} \underset{\infty}{\longrightarrow} e & \text{par TdG}
\end{aligned}$$

II.3 Taylor Lagrange

Théorème 4 : Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,x],\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^{n+1}([x,a],\mathbb{R})$).

Alors on a : $\Big|R_n(x)\Big| = \Big|f(x) - T_n(x)\Big| \leqslant \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup\limits_{[a,x]} \Big|f^{(n+1)}\Big|$

Démonstration. En résumé, c'est un corollaire immédiat de Taylor avec reste intégral en utilisant l'inégalité triangulaire, la linéarité et la croissance de l'intégrale.

D'après Taylor avec reste intégral, il suffit de montrer qu'on a $\left|\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup\limits_{[a,x]} \Big|f^{(n+1)}\Big|$.

On le fait pour $a < x$, traitement analogue si on a $x > a$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_a^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right|\ \mathrm{d}t && \text{par inégalité triangulaire}\\
&\leqslant \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \sup_{[a,x]}\left|f^{(n+1)}\right|\ \mathrm{d}t && \text{par croissance de l'intégrale}\\
&\leqslant \left(\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t\right) \sup_{[a,x]}\left|f^{(n+1)}\right| && \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,x]}\left|f^{(n+1)}\right| && \text{et hop.}
\end{aligned}$$

□

Application 5 Pour tout réel x, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $\begin{cases} f &= \exp \\ a &= 0 \end{cases}$,

$$\begin{aligned}
e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} &= e^x - T_n(x)\\
&= R_n(x)
\end{aligned}$$

On a bien $\exp \in \mathcal{C}^{n+1}([0,x],\mathbb{R})$ (ou $\exp \in \mathcal{C}^{n+1}([x,0],\mathbb{R})$)
donc d'après l'ITL[1],

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,x} |\exp|$$

Notons $M = \max\{1, e^x\}$.

$$\begin{aligned}
\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 && \text{par croissance comparée}
\end{aligned}$$

Donc $e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \to 0$ par TdG donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^x$

Application 6 Déterminons une approximation à 10^{-3} près de $\cos(1)$.

Posons $\begin{cases} f &= \cos \\ a &= 0 \\ x &= 1 \end{cases}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a bien $\cos \in \mathcal{C}^{n+1}([0,1],\mathbb{R})$.

$$|R_n(x)| \leq \frac{|1|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,1]} |\cos^{(n+1)}|$$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ |\cos^{(n+1)}| \leq 1$
Donc $|\cos 1 - T_n(1)| \leq \frac{1}{(n+1)!}$
Or

1. inégalité de Taylor-Lagrange

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(n+1)!} \leq 10^{-3} \\
\Leftrightarrow\ & (n+1)! \geq 10^{-3} && \text{par décroissance de } \frac{1}{\mathrm{id}} \\
\Leftrightarrow\ & n+1 \geq 7 \\
\Leftrightarrow\ & n \geq 6
\end{aligned}$$

Prenons $n = 6$.
Une approximation rationnelle à 10^{-3} près de $\cos 1$ est $T_6(1)$.

$$\begin{aligned}
T_6(1) &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} \\
&= \frac{720 - 360 + 30 - 1}{720} \\
&= \frac{389}{720} \\
&\approx 0.540 && \approx \cos 1
\end{aligned}$$

II.4 Taylor-Young

On l'a déjà vu sans démonstration. Pour le démontrer, on aura besoin d'un petit lemme.

Lemme 1 : « $\int o\left(x^n\right) = o\left(x^{n+1}\right)$ ».

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a alors : $\displaystyle\int_0^x o_0\left(t^n\right)\,\mathrm{d}t = o_0\left(x^{n+1}\right)$

Démonstration. Pour le dire très schématiquement, il s'agit en fait de montrer, sur un exemple (mais on pourrait le faire dans un cadre plus général) que l'intégrale commute aux "petits-o".

Revenons à la définition : on veut alors montrer qu'étant donnée une fonction ε de limite nulle en 0, il existe une fonction $\tilde{\varepsilon}$ de limite nulle en 0 telle qu'on ait $\displaystyle\int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = x^{n+1}\tilde{\varepsilon}(x)$.

Comme $x \mapsto x^{n+1}$ ne s'annule pas dans un voisinage de 0 privé de 0, cela revient à montrer : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Montrons $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = 0$, le calcul de la limite à gauche est analogue. Soit $x \geqslant 0$.

Notons $\varphi(x) = \inf\limits_{t\in[0,x]} \varepsilon(t)$ et $\psi(x) = \sup\limits_{t\in[0,x]} \varepsilon(t)$. Remarquons déjà que, comme on a $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, on obtient, en revenant à la définition de la limite : $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0} \psi(x) = 0$.

Comme $0 \leqslant x$, on a, par croissance de l'intégrale :
$\displaystyle x^{n+1}\frac{\varphi(x)}{n+1} = \int_0^x t^n \varphi(x)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^n \psi(x)\,\mathrm{d}t = x^{n+1}\frac{\psi(x)}{n+1}$.

Et le théorème des gendarmes permet de conclure. □

Théorème 5 : Taylor-Young.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,x],\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^n([x,a],\mathbb{R})$). Alors on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= T_n(x) + o_a\left((x-a)^n\right) \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_a\left((x-a)^n\right)
\end{aligned}$$

/!\ **La formule de Taylor-Young est donc celle qui donne un résultat local. On contrôle f dans un voisinage de a, mais on ne contrôle pas le voisinage en question. Inutile donc d'espérer en déduire quelque résultat que ce soit sur un x fixé ; mais elle permettra d'établir des convergences ou des équivalents pour $x \to a$.**

Exercice : apprendre par cœur les trois phrases précédentes.

DÉMONSTRATION. Une remarque avant de commencer : il est évident que la formule de Taylor-Young est un corollaire immédiat de la formule de Taylor avec reste intégral si l'on se place sous l'hypothèse «$f \in \mathcal{C}^{n+1}$ ». Mais l'hypothèse «$f \in \mathcal{C}^n$ » est **strictement plus faible**. Quitte à changer f en $x \mapsto f(x+a)$, on peut supposer avoir $a=0$, ce qu'on fait ici. On procède par récurrence sur n.

L'idée de la démonstration est très simple : une fois qu'on a un DL à un ordre n de f' par hypothèse de récurrence, on l'intègre à l'aide du lemme précédent pour obtenir un DL à l'ordre $n+1$ de f.

• Initialisation : il s'agit de montrer que, pour tout réel x et toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,x],\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}([x,0],\mathbb{R})$), on a $f(x) = f(0) + o_0(1)$. C'est la définition de la continuité !

• Hérédité : supposons le résultat vrai au rang n. Montrons qu'il est alors vrai au rang $n+1$. Soit donc un réel x et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([0,x],\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^{n+1}([x,0],\mathbb{R})$).

On a alors $f' \in \mathcal{C}^n([0,x],\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^n([x,0],\mathbb{R})$) et donc par hypothèse de récurrence :

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + \frac{f'''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}x^n + o_0\left(x^n\right).$$

Ainsi par le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t \\
f(x) &= f(0) + \int_0^x \left(f'(0) + f''(0)t + \frac{f'''(0)}{2}t^2 + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}t^n + o_0\left(t^n\right)\right)\ \mathrm{d}t \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \int_0^x o_0\left(t^n\right)\ \mathrm{d}t \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + o_0\left(x^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

d'après le lemme précédent. Et la propriété est bien héréditaire.

• La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. □

II.5 Développements limités

Définition 3 : (rappel).

On appelle développement limité (DL) de f un développement asymptotique de f formé de monômes.

Plus précisément, pour $a \in \overline{I}$, on peut définir un $DL_n(a)$ de f comme suit :

- si $a=0$, un $DL_n(0)$ de f est une réécriture de la forme $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$;
- si $a \in \mathbb{R}$, un $DL_n(a)$ de f est une réécriture de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$;
- si $a = \pm\infty$, un $DL_n(\pm\infty)$ de f est une réécriture de la forme $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Remarque 3

Un DL n'existe pas toujours. Par exemple, pour $a \in I$, et pour résumer ce qu'on a vu précédemment :

1. f continue en $a \Leftrightarrow f$ a un $DL_0(a)$;
2. f dérivable en $a \Leftrightarrow f$ a un $DL_1(a)$;
3. f $\mathcal{C}^n$ au voisinage de $a \Rightarrow f$ a un $DL_n(a)$.

Ainsi $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'a de $DL_n(0)$ pour aucune valeurs de n ; $x \mapsto |x|$ n'a de $DL_n(0)$ que pour $n=0$, etc.

Remarque 4

Attention, Taylor-Young donne seulement une **condition suffisante** d'existence de DL. Exemple :

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas $\mathcal{C}^1$ mais elle a un $DL_1(0)$ car elle est dérivable :

$$f(x) = 0 + 0x + o(x)$$

Plus généralement, on montre de même que :

$$f_n(x) := \begin{cases} x^{n+1} \sin \frac{1}{x^n} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas $\mathcal{C}^1$ (donc pas $\mathcal{C}^n$) mais elle a un $DL_n(0)$:
Pour $x \neq 0$, f_n est dérivable en x et

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= (n+1)x^n \sin \frac{1}{x^n} + \cancel{x^{n+1}} \frac{-n}{\cancel{x^{n+1}}} \cos \frac{1}{x^n} \\ &= \underbrace{(n+1)x^n \sin \frac{1}{x^n}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{-n \cos \frac{1}{x^n}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \text{PDL}} \end{aligned}$$

D'où f_n' n'a pas de limite.
De plus,

$$\begin{aligned} f_n'(0) &= \lim_{x\to 0} \tau_{x,f}(0) \\ &= x^n \sin \frac{1}{x^n} \\ &\underset{\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Enfin,

$$f_n(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + o(x^n) = o(x^n)$$

Théorème 6 .

Pour tout $a \in \overline{I}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, un $DL_n(a)$ de f est toujours unique.

Démonstration. Considérons deux $DL_n(0)$ de f

$$\begin{aligned} & f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \\ & f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n) \\ & \Leftrightarrow 0 = \underbrace{(a_0 - b_0)}_{c_0} + \underbrace{(a_1 - b_1)}_{c_1} x + \cdots + \underbrace{(a_n - b_n)}_{c_n} x^n + o(x^n) \qquad \text{par soustraction} \end{aligned}$$

Montrons $\forall i, c_i = 0$ par l'absurde. Supposons $\exists i, c_i \neq 0$ et notons i_0 le plus petit entier tel que $c_{i_0} \neq 0$.
Ainsi

$$\begin{aligned} & 0 = c_{i_0} x^{i_0} + o(x^{i_0}) \\ \Longrightarrow\ & 0 = c_{i_0} + o(1) \qquad \text{avec } x \to 0 \end{aligned}$$

On obtient $c_{i_0} = 0$. Impossible. □

Corollaire 1 .

Supposons que f a un $DL_n(0)$.

1. Si f est paire, alors le $DL_n(0)$ de f est pair.
2. Si f est impaire, alors le $DL_n(0)$ de f est impair.

Démonstration. Supposons $\forall x, f(-x) = f(x)$.

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$
$$f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 + \cdots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n)$$

Donc $\begin{cases} a_1 & = -a_1 \\ a_3 & = -a_3 \\ & \vdots \\ a_{2k+1} & = -a_{2k+1} \end{cases}$, ie $\forall k, a_{2k+1} = 0$ □

Théorème 7 .

On peut intégrer un $DL_n(a)$.

DÉMONSTRATION. C'est une reformulation immédiate du lemme 1. □

Voyons maintenant trois applications pratiques des DL (mais c'est essentiellement trois fois la même).

Application 7 : Nature d'un point critique.

Si $a \in I$ et f a un $DL_n(a)$ de la forme $f(x) = a_0 + a_p(x-a)^p + o\big((x-a)^p\big)$ avec $p \geqslant 2$ et $a_p \neq 0$ alors :

0. a est un point critique de f, et
1. si p est impair alors f a un point d'inflexion en a
2. si p est pair et $a_p > 0$ alors f a un minimum local en a
3. si p est pair et $a_p < 0$ alors f a un maximum local en a

Application 8 : Positions relatives locales de $\mathcal{C}_f$ et ses tangentes.

Si $a \in I$ et f a un $DL_n(a)$ de la forme $f(x) = a_0 + a_1x + a_p(x-a)^p + o\big((x-a)^p\big)$ avec $p \geqslant 2$ et $a_p \neq 0$ alors :

1. si p est impair alors f a un point d'inflexion en a
2. si p est pair et $a_p > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T_a
3. si p est pair et $a_p < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T_a

Application 9 : Positions relatives locales de $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Si $\infty \in \{\pm\infty\}$ et $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ a un $DL_n(\infty)$ de la forme $\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_r}{x^r} + o\big(\frac{1}{x^r}\big)$ avec $r \geqslant 2$ et $a_r \neq 0$ alors :

0. $\mathcal{C}_f$ a pour asymptote en ∞ la droite d'équation $y = a_0x + a_1$
1. $\infty = +\infty \wedge a_r > 0 \implies \mathcal{C}_f$ est au dessus de D
2. $\infty = +\infty \wedge a_r < 0 \implies \mathcal{C}_f$ est en dessous de D
3. $\infty = -\infty \wedge a_r > 0 \wedge r \in 2\mathbb{N}+1 \implies \mathcal{C}_f$ est au dessus de D
4. $\infty = -\infty \wedge a_r < 0 \wedge r \in 2\mathbb{N}+1 \implies \mathcal{C}_f$ est en dessous de D
5. $\infty = -\infty \wedge a_r > 0 \wedge r \in 2\mathbb{N} \implies \mathcal{C}_f$ est en dessous de D
6. $\infty = -\infty \wedge a_r < 0 \wedge r \in 2\mathbb{N} \implies \mathcal{C}_f$ est au dessous de D

III Bilan des inclusions rencontrées

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & & & & \mathcal{DB} \arrow[r, Rightarrow, "IAF"] \arrow[dd, Rightarrow] & \mathcal{L} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & & & & & & & & & & UC \arrow[d, Rightarrow] & \\
\mathcal{C}^\infty \arrow[r, Rightarrow] & \cdots \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{D}^{n+1} \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{C}^n \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "TY"] & \mathcal{D}^n \arrow[r, Rightarrow] & \cdots \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{C}^2 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "TY"] & \mathcal{D}^2 \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{C}^1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "TY"] & \mathcal{D}^1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \mathcal{C}^0 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "TVI"] & \mathcal{D}^0 \arrow[d, Rightarrow, "\text{Darboux}"] \\
 & & & & DL_n \arrow[rrr, dotted, Rightarrow] & & & DL_2 \arrow[rr, Rightarrow] & & DL_1 \arrow[r, Rightarrow] & DL_0 & PVI
\end{tikzcd}$$

IV Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$

L'application 1 nous a déjà convaincu de l'intérêt des applications à valeurs complexes de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{(a+ib)t}$. Comme d'habitude, c'est aussi l'occasion de réviser ce chapitre et le précédent, avant de voir ce qui garde un sens et reste vrai.

Commençons par les définitions :

⋆ Les notions de fonctions dérivables, $\mathcal{D}^n$, $\mathcal{C}^n$: oui

⋆ La notion de DL : oui

⋆ La notion d'extremum local : aucun sens

Passons aux théorèmes :

⋆ Dérivable ⇔ a un DL_1 oui

⋆ Dérivable implique continue : oui

⋆ Dérivées d'une somme, produit, composée, réciproque : oui

⋆ Dérivées n-ièmes d'une somme, produit, composée, réciproque : oui

⋆ Le lemme de Fermat sur les points critiques : aucun sens

⋆ Rolle et l'EAF : non.

Démonstration. Pour $f : \begin{cases} [0,2\pi] & \to \mathbb{C} \\ t & \mapsto e^{it} \end{cases}$.

$$f(c) = e^{i_0} = 1 = 1 = e^{2i\pi} = f(2\pi)$$

On a $f' : \begin{cases} [0,2\pi] & \to \mathbb{C} \\ t & \mapsto ie^{it} \end{cases}$ et $|f'| = t \mapsto 1$ donc on ne peut pas avoir $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f'(c) = 0$ □

⋆ Le théorème sur le signe de la dérivée : aucun sens.

⋆ Les trois formules de Taylor : oui. On change $|\cdot|$ en $|\cdot|$ dans la preuve

En particulier : l'IAF reste vraie sous l'hypothèse $\mathcal{C}^1$ (c'est l'ITL [2] pour $n = 0$)

2. Inégalité de Taylor-Lagrange