Fonctions "mieux que dérivables".

Contexte : dans tout le chapitre

- I désigne une réunion d'intervalles non triviaux ;
- f désigne une application de I dans $\mathbb{R}$, sauf mention du contraire.

I Dérivées d'ordre supérieur

I.1 Définitions

Définition 1 .

1. f est dite n fois dérivable lorsque f', f'', ..., $f^{(n)}$ existent ;
2. f est dite n fois continûment dérivable lorsque f', f'', ..., $f^{(n)}$ existent et $f^{(n)}$ est continue ;
3. f est dite indéfiniment dérivable lorsque pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ existe.

Notation 1

1. Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$;
2. pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois continûment dérivables de I dans $\mathbb{R}$;
3. on note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1

- Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) = \left\{f',\ f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})\right\}$ et, si $n \geqslant 1$, $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) = \left\{f',\ f \in \mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{R})\right\}$.
- La tradition veut qu'on note $\mathcal{D}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble $\left\{f',\ f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})\right\}$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont des dérivées.

I.2 Structure

I.3 Prolongement $\mathcal{C}^n$

Théorème 1 : propriétés de la n-dérivation.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f, g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$. Alors on a :

1. Linéarité : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$;
2. Leibniz : $fg \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ et $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$;
3. Faà di Bruno ~~light~~ per i bambini : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ x \mapsto f(\alpha x + \beta) \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ et $\big(x \mapsto f(\alpha x + \beta)\big)^{(k)} = x \mapsto \alpha^n f^{(n)}(\alpha x + \beta)$.

Plus généralement :

4. $\forall f \in \mathcal{D}^n(I, J),\ \forall g \in \mathcal{D}^n(J, \mathbb{R}),\ g \circ f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$;
5. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, J)$ bijective telle que f' ne s'annule pas, alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J, I)$ (pour I un intervalle).

Remarque : si on suppose plutôt $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, alors il en va de même pour $\lambda f + \mu g$, fg, $x \mapsto f(\alpha x + \beta)$, $f \circ g$ ou f^{-1}.

Démonstration. Le point 2. a déjà été démontré, les autres s'obtiennent par récurrence : exercice. □

Application 1 $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ sont des sous-algèbres de $(\mathbb{R}^I, +, \times, \cdot)$.

On a déjà vu beaucoup d'applications de la formule de Leibniz donc on n'y revient pas ici.

Théorème 2 : théorème de prolongement $\mathcal{C}^n$.

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^n(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $n+1$ réels ℓ_0, ..., ℓ_n tels que
$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_0 \\ f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1 \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_n. \end{cases}$$
Alors f est prolongeable par continuité sur I et son prolongement est $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
En notant encore f ce prolongement, on a $f(a) = \ell_0,\ f'(a) = \ell_1,\ \ldots,\ f^{(n)}(a) = \ell_n$.

II Formules de Taylor

II.1 Contexte

Définition 2 .

Soient $a \in I$ et $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$.

1. On appelle polynôme de Taylor de f en a à l'ordre n le polynôme
$$T_n(X) = f(a) + f'(a)(X-a) + \frac{f''(a)}{2}(X-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$
2. On appelle reste de Taylor de f en a à l'ordre n l'application
$$R_n = x \mapsto f(x) - T_n(x) = x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

II.2 Taylor avec reste intégral

Théorème 3 : Formule de Taylor avec reste intégral.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,x], \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^{n+1}([x,a], \mathbb{R})$). Alors on a

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{i. e.} \\ f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Remarque 2

L'égalité de Taylor avec reste intégral généralise donc le théorème fondamental de l'analyse.

II.3 Taylor Lagrange

Théorème 4 : Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,x], \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^{n+1}([x,a], \mathbb{R})$).

Alors on a : $\left|R_n(x)\right| = \left|f(x) - T_n(x)\right| \leqslant \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup\limits_{[a,x]} \left|f^{(n+1)}\right|$

II.4 Taylor-Young

Lemme 1 : « $\int o(x^n) = o\left(x^{n+1}\right)$ ».

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a alors : $\displaystyle\int_0^x o_0(t^n)\ \mathrm{d}t = o_0\left(x^{n+1}\right)$

Théorème 5 : Taylor-Young.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,x], \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^n([x,a], \mathbb{R})$). Alors on a

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x) + o_a\left((x-a)^n\right) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_a\left((x-a)^n\right) \end{aligned}$$

II.5 Développements limités

Définition 3 : (rappel).

On appelle développement limité (DL) de f un développement asymptotique de f formé de monômes.

Plus précisément, pour $a \in \overline{I}$, on peut définir un $DL_n(a)$ de f comme suit :

- si $a = 0$, un $DL_n(0)$ de f est une réécriture de la forme $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$;
- si $a \in \mathbb{R}$, un $DL_n(a)$ de f est une réécriture de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$;
- si $a = \pm\infty$, un $DL_n(\pm\infty)$ de f est une réécriture de la forme $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\Big(\frac{1}{x^n}\Big)$.

Remarque 3

Un DL n'existe pas toujours. Par exemple, pour $a \in I$, et pour résumer ce qu'on a vu précédemment :

1. f continue en $a \Leftrightarrow f$ a un $DL_0(a)$;
2. f dérivable en $a \Leftrightarrow f$ a un $DL_1(a)$;
3. f $\mathcal{C}^n$ au voisinage de $a \Rightarrow f$ a un $DL_n(a)$.

Ainsi $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'a de $DL_n(0)$ pour aucune valeurs de n ; $x \mapsto |x|$ n'a de $DL_n(0)$ que pour $n = 0$, etc. **Remarque 4**

Attention, Taylor-Young donne seulement une **condition suffisante** d'existence de DL. Exemple :

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas $\mathcal{C}^1$ mais elle a un $DL_1(0)$ car elle est dérivable :

$$f(x) = 0 + 0x + o(x)$$

Plus généralement, on montre de même que :

$$f_n(x) := \begin{cases} x^{n+1} \sin \frac{1}{x^n} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas $\mathcal{C}^1$ (donc pas $\mathcal{C}^n$) mais elle a un $DL_n(0)$:
Pour $x \neq 0$, f_n est dérivable en x et

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= (n+1)x^n \sin \frac{1}{x^n} + \cancel{x^{n+1}} \frac{-n}{\cancel{x^{n+1}}} \cos \frac{1}{x^n} \\ &= \underbrace{(n+1)x^n \sin \frac{1}{x^n}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} + \underbrace{-n \cos \frac{1}{x^n}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} \text{PDL}} \end{aligned}$$

D'où f_n' n'a pas de limite.
De plus,

$$\begin{aligned} f_n'(0) &= \lim_{x\to 0} \tau_{x,f}(0) \\ &= x^n \sin \frac{1}{x^n} \\ &\xrightarrow[\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Enfin,

$$f_n(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + o(x^n) = o(x^n)$$

Théorème 6 .

Pour tout $a \in \overline{I}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, un $DL_n(a)$ de f est toujours unique.

Corollaire 1 .

Supposons que f a un $DL_n(0)$.

1. Si f est paire, alors le $DL_n(0)$ de f est pair.
2. Si f est impaire, alors le $DL_n(0)$ de f est impair.

Théorème 7 .

On peut intégrer un $DL_n(a)$.

III Bilan des inclusions rencontrées

IV Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$