Matrices

I. Opérations de base.

Exercice 1. *Somme, opposée, transposée*

On note $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A - {}^tA$.

Exercice 2. *Produits matriciels*

Déterminer tous les couples de matrices dont on peut faire le produit dans la liste suivante.
Déterminer tous les couples de matrices qui commutent ($M \times N = N \times M$)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. ©© ★ *Exponentiation*

(a) Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, où A est la matrice de l'exercice 1.

(b) Exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ à l'aide d'une suite bien connue.

(c) On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(d) On note $(\mathbb{1})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont des 1.
Calculer $(\mathbb{1})^k$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

(e) Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer M^p, pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. ©© ★ *Inversion*

Déterminer les matrices inversibles de la liste suivante. Les inverser.

(a) La matrice A de l'exercice 1.

(b) La matrice G de l'exercice 2.

(c) La matrice J de l'exercice précédent.

(d) La matrice $(\mathbb{1})$ de l'exercice précédent.

EXMMAT

$\boxed{1}$

B	C		B	B
C	B		C	C
E	D		E	E
F	D		G	G
G	D		E	G
E	G		G	E
G	E			
F	E			
F	G			
B	B			
C	C			
E	E			
G	G			

$\boxed{4/a}$ A: $1 \cdot 3 - (-3) \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ A non-inversible

$\boxed{4/b}$ G: $1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow$ G inversible

$$G^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4/c}$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3/c

$$\begin{array}{c|c|c|c} & \begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix} & \begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} & \begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix} \end{array}$$

$$J^n \overset{?}{=} \begin{cases} J & \text{si } n \equiv 1 \ [3] \\ {}^tJ & \text{si } n \equiv 2 \ [3] \\ I_3 & \text{si } n \equiv 3 \ [3] \end{cases}$$

par DE $n = 3k+r$

$$J^n = J^{3k+r} = (J^3)^k \times J^r$$
$$= (I_3)^k \times J^r$$
$$= J^r$$

3/d

$$(1) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On a $(1)^2 = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = n(1)$

Conjecture

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (1)^k = n^{k-1}(1)$

(I) ok! (H) Soit $k \in \mathbb{N}$. Supp $(1)^k = n^{k-1}(1)$.

$$(1)^{k+1} = (1)^k \times (1) = n^{k-1} \cdot (1)^{\prime} = n^{k-1} n (1)$$
$$= n^k (1) \text{ ok!}$$

II. Applications.

Exercice 5. *En algèbre : résolution de systèmes linéaires.*

1. Soit E une matrice $n \times n$ telle que $E^n = (0)$. Montrer que $M = I_n - E$ est inversible et calculer M^{-1}.
2. Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$.
3. Résoudre $\begin{cases} 2y + z = 1 \\ -x + 4y + 2z = 2 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases}$.

Exercice 6. *En analyse : suites récurrentes linéaires multiples.*

Exprimer en fonction de n, u_0 et v_0 les termes généraux de suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - v_n \end{cases}$.

Exercice 7. *En Info/Géométrie.*

Montrer que, si un point a pour coordonées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé direct, et qu'on souhaite obtenir les coordonnées dans ce même reprère du point obtenu après une rotation d'angle θ et de centre l'origine du repère, les coordonnées du nouveau point s'obtiennent par le produit matriciel $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Là c'est un exemple rudimentaire mais sur le même principe les matrices sont omniprésentes en traitement de l'image.

Exercice 8. *En probabilité : battage de cartes*

On souhaite battre un paquet de 2 cartes [1]. Pour être sûr de bien le mélanger on effectue n battages successifs. Après chaque battage, le paquet a la même probabilité $0 < p < 1$ de ne pas être modifié, et donc la probabilité $q = 1 - p$ d'avoir été inversé. On note u_n la probabilité que le paquet revienne à son état initial à l'issue de n battages, et v_n la probabilité qu'il n'y revienne pas. On note aussi $M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

1. Que vaut $M \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$?
2. Que vaut $M^n \times e_1$?
3. Que dire des probabilités u_n et v_n lorsque n tend vers l'infini ? Qu'en déduire ?

Remarque : On peut aussi faire sans matrice en dégainant nos braves suites arithmético-géométriques, mais c'est bien de s'entraîner au CCP 101.

1. Bien sûr le 2 est idiot, mais on pourrait faire la même chose pour un paquet de 52 cartes, le principe exposé ici permettrait d'arriver au même résultat après des calculs toutefois plus difficiles à mener.

EX $\underline{\text{M}}$ MAT

$\boxed{3'e}$

$$\begin{pmatrix} 2 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + I_n\right)^p$$

et $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et I_n commutent donc d'ap le BdN

$\boxed{6}$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} M := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \\ A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \\ B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

A et B commutent donc d'après le BdN:

$$M^n = (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} + I_2 + nA$$

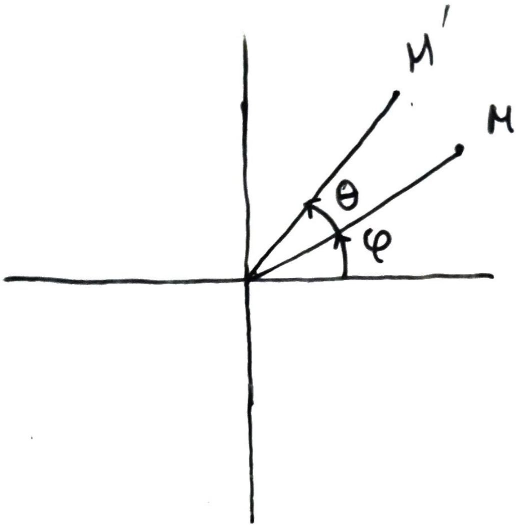
$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & -n \\ 4n & -2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix}$$

EXMMAT

Open the pod bay doors

I'M AFRAID I CAN'T DO THAT, DAVE.

$\boxed{7}$ Meth 1



$$\begin{cases} x := \cos\varphi \, R \\ y := \sin\varphi \, R \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} x' := \cos(\varphi+\theta) R \\ y' := \sin(\varphi+\theta) R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = (\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) R \\ y' = (\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = (x\cos\theta - y\sin\theta) R \\ y' = (y\cos\theta + x\sin\theta) R \end{cases}$$

d'où : $\begin{cases} x' = \cos\theta \, x - \sin\theta \, y \\ y' = \sin\theta \, x + \cos\theta \, y \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Meth 2 Soient $M, M' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Posons $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$

$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ ici $\omega = 0$

$= z e^{i\theta}$

$= (x + iy)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= x\cos\theta + iy\cos\theta + ix\sin\theta - y\sin\theta$

$z' = x' + iy'$ avec $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$; $y' = \sin\theta \, x + \cos\theta \, y$ ... etc

$\boxed{5/1}$ $\begin{cases} E^n = (0) & \text{i.e. } E \text{ est } \underline{\text{nilpotente}} \\ M = I_n - E \end{cases}$

On cherche N tq $M \times N = I_n$

$$\Leftrightarrow (I_n - E) \times N = I_n$$

$$\Leftrightarrow (I_n - E) \times N = I_n - E^n$$

Mq $N = I_n + E + \dots + E^{n-2} + E^{n-1}$ convient

$$\begin{aligned}(I_n - E) \times N &= I_n \times N - E \times N \\ &= I_n + E + E^2 + \dots + E^{n-1} \\ &\qquad - E - E^2 - \dots - E^{n-1} - E^n \\ &= I_n - E^n\end{aligned}$$

$\boxed{5/2}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= +1(-2+3) + 1(4-4)$$

$$= 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$E^3 = (0) \in \mathcal{M}_3(\{0\})$$

$$E^{-1} = I_3 + E + E^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & -1 & -1 \\ & & \end{pmatrix}$$

$\boxed{5/3}$

$$\begin{cases} 2y + z = 1 \\ -x + 4y + 2z = 2 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

D'après Q_2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \\ z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(2n+1) - n v_0 \\ 4n u_0 + v_0(-2n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$