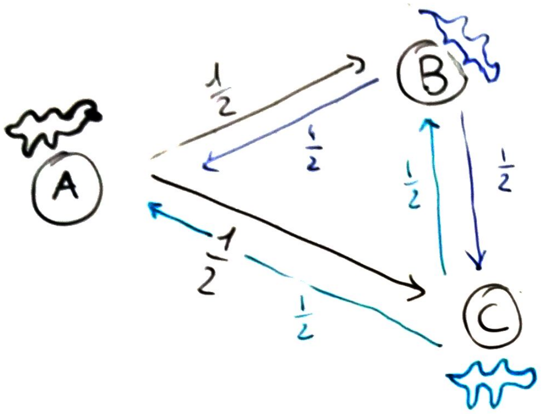
Calcul matriciel

eg CCINP 101



$$a_{n+1} = P(A_{n+1})$$
$$= \underbrace{P(A_{n+1}|A_n)}_{0}\cdot P(A_n) + \underbrace{P(A_{n+1}|B_n)}_{\frac{1}{2}}\cdot P(B_n) + \underbrace{P(A_{n+1}|C_n)}_{\frac{1}{2}}\cdot P(C_n)$$
$$= 0\cdot P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) + \frac{1}{2}P(C_n)$$
$$= 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

De même,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 0b_n + \frac{1}{2}c_n$$
$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + 0c_n$$

Avec le formalisme matriciel, cette relation de récurrence s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

notatn Dans tout le chapitre on note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Ensemble de matrices

1 Matrice

<u>def</u>

On appelle "matrice à p lignes et q colonnes à coef dans $\mathbb{K}$" un tableau à p lignes et q colonnes dont les éléments sont dans $\mathbb{K}$.

<u>eg</u>

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 2 colonnes

<u>notation</u>

- On note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$

<u>remq</u>

- On peut décrire une matrice par ses coefs

  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$

- par ses colonnes

  $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_q \\ | & & | \end{pmatrix}$

- par ses lignes

$$A = \begin{pmatrix} — L_1 — \\ \vdots \\ — L_p — \end{pmatrix}$$

eg matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

notatn Écriture synthétique

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{où} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

"symbole de Kronecker"

$$I_n = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^e \text{ ligne}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} — & {}^t e_1 & — \\ & \vdots & \\ — & {}^t e_n & — \end{pmatrix}$$

où $${}^t e_i = (0 \cdots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ i^e \text{ colonne}}}{1} 0 \cdots 0)$$

2 Transposition

def

Soit $M = (m)_{ij} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On apelle <u>transposée de M</u> la matrice obtenue en renversant lignes et colonnes

ie $${}^t M = (m_{ji})_{ij} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$$

eg

$$^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

notatn

$$^tM = M^T$$

remq On a défini une (famille d') application(s)

$$t : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \\ M \longmapsto {}^tM \end{cases}$$

la transposition.

thm involutivité de ^{t}.

$$\forall M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad {}^t({}^tM) = M$$

3 Matrices remarquables

Quelques (familles de) matrices remarquables

Terminologie.

I Matrices remarquables dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Il n'est pas nécessaire que le nombre de ligne soit le même que le nombre de colonnes pour définir les matrices suivantes :

- **Matrice nulle**, notée $(0) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$: c'est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

$$(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matrice élémentaire** : la $(i,j)^{\text{ième}}$ matrice élémentaire, notée $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient en ligne i colonne j qui vaut 1.

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & & \text{col } j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \text{lig } i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

En notant e_k une matrice colonne dont le $k^{\text{ième}}$ coefficient est 1 et les autres sont nuls, on a $E_{i,j} = e_i \times {}^t e_j$.

II Matrices remarquables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il est nécessaire que le nombre de ligne soit égal au nombre de colonnes pour définir les (familles de) matrices suivantes :

- **Matrice identité**, notée $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: c'est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf les coefficients diagonaux qui valent tous 1.

$$I_n = (\delta_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matrice diagonale** : c'est une matrice dont tous les coefficients non diagonaux sont nuls.
  Les coefficients diagonaux sont quelconques (ils peuvent être nuls ou non nuls).

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\boxed{\bullet}$ **Matrice triangulaire** : on peut préciser.

$\rightsquigarrow$ Une **matrice triangulaire supérieure** est une matrice T dont les coefficients strictement en dessous de la diagonale sont nuls : $T = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que $\forall i > j, a_{i,j} = 0$. Les autres coefficients sont quelconques.

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Une **matrice triangulaire supérieure stricte** est une matrice T triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont nuls : $T = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que $\forall i \geqslant j, a_{i,j} = 0$.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Une **matrice triangulaire inférieure** est une matrice T dont les coefficients strictement au dessus de la diagonale sont nuls : $T = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que $\forall i < j, a_{i,j} = 0$. Les autres coefficients sont quelconques.

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

C'est la transposée d'une matrice triangulaire supérieure.

$\rightsquigarrow$ Une **matrice triangulaire inférieure stricte** est une matrice T traingulaire inférieure dont les coefficients diagonaux sont nuls : $T = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que $\forall i \leqslant j, a_{i,j} = 0$.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

C'est la transposée d'une matrice triangulaire supérieure stricte.

$\boxed{\bullet}$ **Matrice symétrique ou antisymétrique**

$\rightsquigarrow$ Une **matrice symétrique** est une matrice S dont les coefficients sont symétriques par rapport à la diagonale : $S = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que $\forall i, \forall j, a_{j,i} = a_{i,j}$.

$$S = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{1,n} & \dots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Autrement dit S vérifie ${}^tS = S$.

$\rightsquigarrow$ Une **matrice antisymétrique** est une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que $\forall i, \forall j, a_{j,i} = -a_{i,j}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ -a_{1,n} & \dots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit A vérifie ${}^tA = -A$.

Les coefficients diagonaux sont nécessairement nuls puisqu'en prenant $j = i$ on trouve $a_{i,i} = -a_{i,i}$.

II Opérations sur les matrices

1 Combinaison linéaire

def

Soient $\begin{cases} A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ B = (b_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \end{cases}$

La somme de A et B :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$$

$$+ \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2 \longrightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ (M, N) \longmapsto M + N \end{cases}$$ est L'addition des matrices.

remq

- $\begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_q \\ | & & | \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} | & & | \\ C'_1 & \cdots & C'_q \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 + C'_1 & \cdots & C_q + C'_q \\ | & & | \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} - L_1 - \\ \vdots \\ - L_p - \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - L'_1 - \\ \vdots \\ - L'_p - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - L_1 + L'_1 - \\ \vdots \\ - L_p + L'_p - \end{pmatrix}$

thm

$(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.

1 La matrice nulle est neutre pour $+$
$\forall M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ M + (0) = (0) + M = M$

2 Toute matrice M a un symétrique pour $+$: $-M = (-m_{ij})_{ij}$

3 $+$ est associative

4 $+$ est commutative

def

Soit $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On note $\lambda \cdot M$ ou λM la matrice $(\lambda m_{ij})_{ij}$

eg

$$2 I_n = \begin{pmatrix} 2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 2 \end{pmatrix}$$

remq On a défini une famille d'applications

$$\cdot \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, M) \mapsto \lambda \cdot M \end{cases}$$

on l'apelle multiplication externe.

thm

$(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ forme un espace vectoriel, ie

1 $(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien

2 $\cdot$ est compatible avec 1 et $\times_{\mathbb{K}}$

$$\begin{cases} \forall M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad 1 \cdot M = M \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \ \lambda \cdot (\mu \cdot M) = (\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu) \cdot M \end{cases}$$

3 $\cdot$ est distributive sur $+$ et $+_{\mathbb{K}}$

$$\begin{cases} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \ (\lambda + \mu) \cdot M = \lambda \cdot M + \mu \cdot M \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall M, N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \ \lambda \cdot (M + N) = \lambda \cdot M + \lambda \cdot N \end{cases}$$

thm $\mathbb{K}$-linéarité de ^{t}.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \forall M, N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \ {}^t(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) = \lambda\, {}^tM + \mu\, {}^tN$$

2. Produit

def

Soit $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ une matrice ligne. $(l_1, l_2, \cdots l_n)$

et $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne. $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

On appelle produit de L par C

$$L \times C = \left(l_1 c_1 + l_2 c_2 + \cdots + l_n c_n \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} l_k c_k \right)$$

eg

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \left(4 + 10 + 18 \right) = (32)$$

def

Soient $\begin{cases} M \in \begin{pmatrix} — L_1 — \\ \vdots \\ — L_p — \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ N \in \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_r \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \end{cases}$

On apelle produit M par N

$$M \times N = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & \cdots & L_1 \times C_r \\ \vdots & & \vdots \\ L_p \times C_1 & \cdots & L_p \times C_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$$

⚠ On ne peut multiplier M et N que si le nombre de colonnes de M et égal aux nombre de lignes de N

eg

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$

; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$

$A \times B$ a un sens, c'est une matrice 2×3.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

$B \times A$ n'a pas de sens !

$C \times A$ c'est une matrice 3×2

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 & 8 \\ -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{matrix} \end{array}$$

remq On a défini une famille d'application(s)

$$\times \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \\ (M, N) \longmapsto M \times N \end{cases}$$ la multiplication

Un cas particulier remarquable :

$$\times \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (M, N) \longmapsto M \times N \end{cases}$$ la multiplication interne

thm

1 I_p est neutre à gauche

$\forall M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ I_p \times M = M$

2 I_q est neutre à droite

$\forall M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ M \times I_q = M$

3 $\times$ est distributive sur $+$

$$\begin{cases} \forall M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall N, N' \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ M \times (N + N') = M \times N + M \times N' \\ \forall M, M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall N \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ (M + M') \times N = M \times N + M' \times N \end{cases}$$

thm $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau

⚠ Pour $n \geq 2$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est pas un anneau commutatif

eg $$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

⚠ Pour $n \geq 2$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est pas intègre

eg $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

remq

1 $\begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_q \\ | & & | \end{pmatrix} \times e_i = \begin{pmatrix} | \\ C_i \\ | \end{pmatrix}$

2 ${}^t e_i \times \begin{pmatrix} - L_1 - \\ \vdots \\ - L_p - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - L_i - \end{pmatrix}$

3 $M \times \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_q \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ M \times C_1 & \cdots & M \times C_q \\ | & & | \end{pmatrix}$

4 $\begin{pmatrix} — L_1 — \\ \vdots \\ — L_p — \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} — L_1 \times M — \\ \vdots \\ — L_p \times M — \end{pmatrix}$

app.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

thm

Les deux produits sont compatibles

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall N \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$

$$\lambda \cdot (M \times N) = (\lambda \cdot M) \times N = M \times (\lambda \cdot N)$$

On dit que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ forme une $\mathbb{K}$-algèbre

app. On peut appliquer un polynôme à une matrice carrée

Si $P = a_0 X^0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

alors $P(M) = a_0 I_n + a_1 M + \cdots + a_d M^d$

thm

Soient $\begin{cases} A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \end{cases}$. $\quad {}^t(A \times B) = {}^tA \times {}^tB$

3 Inversion

def

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

On appelle inverse de M une matrice N telle que

$$M \times N = N \times M = I_n$$

thm

1 Un inverse de M n'existe pas toujours mais est toujours unique.
On le note M^{-1}

2 $\begin{cases} N \,/\, M \times N = I_n \\ \text{ou} \\ N \,/\, N \times M = I_n \end{cases} \Rightarrow N = M^{-1}$

thm

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors M inversible ssi $ad - bc \neq 0$

Auquel cas $M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

thm

Soit M inversible. Alors ${}^tM$ inversible et $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$

III Méthodes de calcul de puissances

rappel CCINP 101

$(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ vérifient.

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 0b_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + 0c_n \end{cases}$$

Reformulation: pour $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

Notons $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$X_1 = M \times X_0$

$X_2 = M \times X_1 = M^2 \times X_0$

$X_3 = M \times X_2 = M^2 \times X_1 = M^3 \times X_0$

$\vdots$

$X_n = M^n \times X_0$

Dans l'énoncé CCINP: $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Par contemplation puis récurrence

eg $(1 \quad 1 \quad 0)^n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ?$$

$$\begin{array}{cccc}
 & \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{matrix} & \begin{matrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{matrix} & \begin{matrix}1&4&6\\0&1&4\\0&0&1\end{matrix}
\end{array}$$

Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Meth 2

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix} \\
\begin{matrix}1&n&\alpha_n\\0&1&n\\0&0&1\end{matrix} & \begin{matrix}&&n+\alpha_n\\&&\\&&\end{matrix}
\end{array}$$

$\alpha_{n+1} = n + \alpha_n$

$\alpha_n = (n-1) + (n-2) + \cdots + 0$

$= \dfrac{n(n-1)}{2}$

$\left(= \binom{n}{2} \right)$

Montrons-le par récurrence.

Ⓘ $(n=0)$: $M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \binom{0}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ⓗ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supp $M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$M^{n+1} = M^n \cdot M$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&n&\binom{n}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}1&n+1&n+\binom{n}{2}\\0&1&n+1\\0&0&1\end{matrix}\end{array}$$

Or $\quad n+\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}$

donc $\quad M^{n+1}=M^n\times M=\begin{pmatrix}1&(n+1)&\binom{n+1}{2}\\0&1&(n+1)\\0&0&1\end{pmatrix}$

d'où l'hérédité.

2 Matrices nilpotentes

def

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

M est nilpotente $\iff \exists p \in \mathbb{N}^*, \; M^p = (0)$

indice de nilpotence de $M := \min \{ p \in \mathbb{N}, \; M^p = (0) \}$

eg

	indice de nilpotence
• $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	2
• $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3
• $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4

thm

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice de nilpotence N.

Alors $N \leq n$

3 Binôme de Newton

thm

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

QUI COMMUTENT

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

⚠ $$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

app retrouvons $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

Notons $\begin{cases} M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

On a $M = A+B$ et A et B commutent (car I_3 commute avec <u>toutes</u> les matrices)

D'après le BdN : $M^n = (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \times I_3$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{B^k}_{(0)}}_{(0)}$$

B est nilpotente à partir de 3

$$= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2$$

$$= I_3 + nB + \binom{n}{2} B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

app $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$

$$\begin{cases} M := \begin{matrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{matrix} \\ A := \begin{matrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{matrix} \\ B := \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} = 2I_2 \end{cases}$$

et A et B commutent.

d'ap BdN:

$$M^n = (A+B)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} A^k \underbrace{B^{n-k}}_{(0)}}_{(0)}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \underbrace{A^0}_{I_2} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} A^1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & 4n \\ -n & -2n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2n+1 & 4n \\ -n & -2n+1 \end{pmatrix}$$

On peut enfin calculer $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ (CCINP 101)

Notons $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On cherche $\left(\frac{1}{2} M\right)^n = \frac{1}{2^n} M^n$

Notons $\begin{cases} A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ B := -I_3 \end{cases}$

Tel que $M = A + B$ et A et B commutent.

donc d'après le BdN,

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (-I_3)^{n-k}$$

On a vu qu'on avait $A^k = \begin{cases} 3^{k-1} A & \text{si } k \geq 1 \\ I_3 & \text{si } k = 0 \end{cases}$

Donc

$$M^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}(-1)^{n-k} A + \underbrace{(-I_3)^n}_{k=0}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}(-1)^{n-k}\right) A + (-I_3)^n$$

$$= \left(\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k}(-1)^{n-k}\right) A - \frac{1}{3}(-1)^n A + (-1)^n I_3$$

$$= \frac{1}{3} \qquad 2^n \qquad A + (-1)^n\left(I_3 - \frac{1}{3}A\right)$$

Finalement

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} \\ \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} \\ \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} & \frac{2^n}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n 2}{3} & \frac{(-1)^{n+1}}{3} & \frac{(-1)^{n+1}}{3} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{3} & \frac{(-1)^n 2}{3} & \frac{(-1)^{n+1}}{3} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{3} & \frac{(-1)^{n+1}}{3} & \frac{(-1)^n 2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2^n+(-1)^n 2}{3} & \frac{2^n-(-1)^n}{3} & \frac{2^n-(-1)^n}{3} \\ \frac{2^n-(-1)^n}{3} & \frac{2^n+(-1)^n 2}{3} & \frac{2^n-(-1)^n}{3} \\ \frac{2^n-(-1)^n}{3} & \frac{2^n-(-1)^n}{3} & \frac{2^n+(-1)^n 2}{3} \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n =$$

(à recopier c'est monstrueux)

c'est celle-là ÷ par 2^n

rpl

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \\ 1 - \frac{(-1)^n}{2^n} \\ 1 - \frac{(-1)^n}{2^n} \end{pmatrix}$$

IV Trace d'une matrice

1 Définition

def

Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Somme des coefs diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(M) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

eg

- $\mathrm{Tr}((0)) = 0$
- $\mathrm{Tr}\, I_n = n$
- $\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$
- $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = n$
- $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 0$

remq Trace d'une nilpotente

M nilpotente $\Rightarrow \mathrm{Tr}\, M = 0$

2 Propriétés fondamentale de la trace

thm ppté fondamentale de la trace

Soit $\begin{cases} A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \end{cases}$ $\mathrm{Tr}(A \times B) = \mathrm{Tr}(B \times A)$

<u>remq</u>

On pourrait le démontrer avec Fubini.

<u>thm</u> linéarité de la trace

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(\lambda M + \mu N) = \lambda \mathrm{Tr}\, M + \mu \mathrm{Tr}\, N$$

<u>thm</u>

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{Tr}({}^tM) = \mathrm{Tr}\, M$ $\square$