$\boxed{11/1}$

$$U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) ; \quad V \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$$

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} v_1 & \cdots\cdots & v_n \end{pmatrix}$$

$$A = UV = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n v_1 & \cdots & u_n v_n \end{pmatrix}$$

$\underline{1^{er} \text{ cas}}$ $(U, V \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$ $\overset{\text{def}}{\exists} i,\ u_i \neq 0$, d'où

$$A \simeq \begin{pmatrix} & & (0) & & \\ & 0 & & 0 & \\ & u_i v_i & \cdots\cdots & u_i v_n & \\ & 0 & & 0 & \\ & & (0) & & \end{pmatrix} \qquad L_j \leftarrow L_j - \frac{u_j}{u_i} L_i$$

d'où $\operatorname{rg} A = 1$ car $\exists j,\ v_j \neq 0$

$\underline{2^e \text{ cas}}$ $(U = (0)_n$ ou $V = (0)_n)$

$$A = (0)_n \quad \text{donc} \quad \operatorname{rg} A = 0 \leq 1$$

$\boxed{11/2}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\underline{1^{er} \text{ cas}}$ $(\operatorname{rg} A = 1)$: donc $\overset{\text{def}}{\exists} k \in [\![1, n]\!]$, $(\text{—} L_k \text{—}) \neq (0 \text{—} 0)$

donc il existe $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \text{—}\lambda_1 L_k\text{—} \\ \vdots \\ \text{—}\lambda_n L_k\text{—} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \times (\text{—} L_k \text{—})$$

Donc $U.V = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} . (- \cdot L_k \cdots)$

2e cas ($\mathrm{rg}\, A = 0$) : $U = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$ et/ou $V = (0 - 0)$

$\boxed{11/2/b}$

$$V \times U = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k v_k \right) = \mathrm{Tr}\, A$$

$\boxed{11/2/c}$

$$A^2 = (UV) \times (UV) = U(VU)V$$
$$= U \,\mathrm{Tr} A\, V$$
$$= UV \,\mathrm{Tr} A$$
$$= A \,\mathrm{Tr} A$$

$$A^3 = A A^2 = A A \,\mathrm{Tr} A = A^2 \,\mathrm{Tr} A = A \,\mathrm{Tr} A \,\mathrm{Tr} A = A (\mathrm{Tr}\, A)^2$$

$\vdots$ par récurrence immédiate

$$A^n = A (\mathrm{Tr}\, A)^{n-1}$$

$\boxed{11/3}$ $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A \sim D$ avec D diagonale.

On a $\begin{cases} \mathrm{rg}\, D = \mathrm{rg}\, A \leq 1 \\ \mathrm{Tr}\, D = \mathrm{Tr}\, A \end{cases}$

On a $\begin{cases} D \text{ diago.} \\ \mathrm{rg}\, D \leq 1 \end{cases}$ donc $D := \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 0 \;\alpha\; 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Tr}\, D = 0+0+0+\cdots+0+\alpha+0+0+0+\cdots+0$$
$$= \alpha$$
$$= \mathrm{Tr}\, A$$

donc $D := \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \mathrm{Tr}\,A & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ (0) & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

On veut montrer $r = 0$ ou $\mathrm{Tr}\, A \neq 0$

$r \neq 0 \Rightarrow D \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}\, A \neq 0$: ok.

$\boxed{\Leftarrow}$ cf. CCINP 72.

$\boxed{12}$

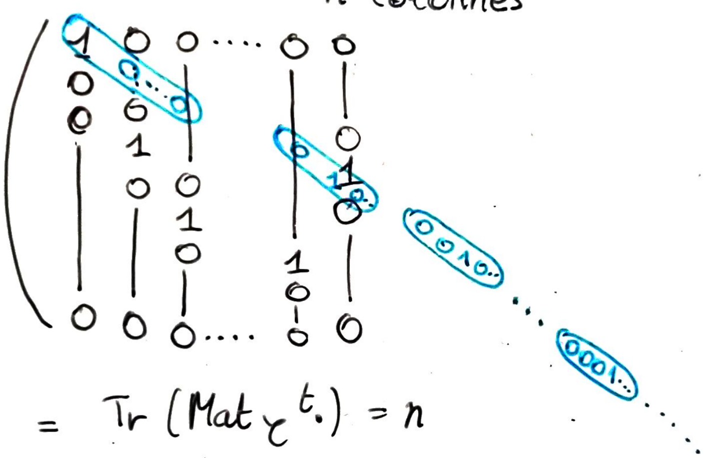
$t_\cdot : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est bien un endomorphisme

$\mathrm{Tr}(t_\cdot) = ?$

On considère la base de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivante

$$\mathcal{C} = (E_{11}, \dots, E_{1j}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{i1}, \dots, E_{nn})$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(t_\cdot) = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | & & | & | & & | & & | \\ {}^tE_{11} & \cdots & {}^tE_{1j} & \cdots & {}^tE_{1n} & {}^tE_{21} & \cdots & {}^tE_{i1} & \cdots & {}^tE_{nn} \\ |_{\mathcal{C}} & & |_{\mathcal{C}} & & |_{\mathcal{C}} & |_{\mathcal{C}} & & |_{\mathcal{C}} & & |_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}}_{n^2 \text{ colonnes}} \Big\} \, n^2 \text{ lignes}$$

$=$ 

sah...

$$\mathrm{Tr}\, t_\cdot = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\, t_\cdot) = n$$

Meth 2

$\phi := t_\cdot : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\phi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ $\quad$ ϕ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(\phi + \mathrm{id})$

$$\mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{id}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ {}^tM = M\} = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$
$$\mathrm{Ker}(\phi + \mathrm{id}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ {}^tM = -M\} = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à $S_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \phi = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\dim S_n(\mathbb{K})} \; \underbrace{\qquad\qquad}_{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$$

$$\mathrm{Tr}\, \phi = \dim S_n(\mathbb{K}) - \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= n$$

$\phi \circ \phi$