Matrices d'AL

Ds tout le chapitre : $\begin{cases} E \text{ est un } \mathbb{K}\text{-ev tq dim} \\ F \text{ est un } \mathbb{K}\text{-ev tq dim} F = p \end{cases}$

I. Matrices associées à une AL

1) Codage matriciel

• Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{B}_E = (\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F

On appelle matrice de f de la base $\mathcal{B}_E$ ds la base $\mathcal{B}_F$ la matrice

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & \dots & f(\varepsilon_n) \\ |_{\mathcal{B}_F} & |_{\mathcal{B}_F} & & |_{\mathcal{B}_F} \end{pmatrix}$$

C'est donc la matrice ds la base $\mathcal{B}_F$ de la famille $f(\mathcal{B}_E)$

Notation $\quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} f \quad$ notation du programme

$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E} f \quad$ notation d'Abreu

Cas particulier $\begin{cases} E = \mathbb{K}^q \\ F = \mathbb{K}^p \\ \mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_q) = \mathcal{C}_E \\ \mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p) = \mathcal{C}_F \end{cases}$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}_F \leftarrow \mathcal{C}_E} f = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_q) \\ | & | & & | \end{pmatrix} = A \text{ tq } f(x) = Ax \text{ d'après le cours sur les AL}$$

Ex : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix} \end{cases}$ Pour $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}\, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \not\parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (pas $\parallel$)

$$\mathcal{M}at_{B\leftarrow B}\, f = \left(f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_B, f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{B\ B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $g : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P \to P' \end{cases}$

PR $\mathcal{C}_n = (1, X, \dots, X^n)$

$\mathcal{C}_{n-1} = (1, X, \dots, X^{n-1})$

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}_{n-1}\leftarrow\mathcal{C}_n}\, g = \left(g(1)_{\mathcal{C}_{n-1}}, g(X)_{\mathcal{C}_{n-1}}, \dots, g(X^n)_{\mathcal{C}_{n-1}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & & \vdots \\ & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & n \end{pmatrix}$$

- $h : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto {}^tM \end{cases}$

$\mathcal{C} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}\, h = \left(h(E_{1,1})_{\mathcal{C}}, h(E_{1,2})_{\mathcal{C}}, h(E_{2,1})_{\mathcal{C}}, h(E_{2,2})_{\mathcal{C}} \right) = \left(E_{1,1\,\mathcal{C}}, E_{2,1\,\mathcal{C}}, E_{1,2\,\mathcal{C}}, E_{2,2\,\mathcal{C}} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rq: cas des endomorphismes

Pr $f \in \mathcal{L}(E)$ il est intéressant de choisir la m̂ base B à la source et au but. On note $\mathrm{Mat}_B f$ pour $\mathrm{Mat}_{B \leftarrow B} f$

Théorème

Soit $\begin{cases} B_F \text{ base de } F \\ B_E \text{ base de } E \end{cases}$

Alors $\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ f \longmapsto \mathrm{Mat}_{B_F \leftarrow B_E} f \end{cases}$ est bijective

Demo: reformulation de la ppté fondamentale sur les AL

Rappel cette app permet de préserver le rang

ie $rg(f) = rg(\mathrm{Mat}_{B_F \leftarrow B_E} f)$ car $rg(\mathrm{Mat}_{B_F \leftarrow B_E} f) = rg\left(f(\varepsilon_1)_{B_F} \dots f(\varepsilon_q)_{B_F} \right)$

$= rg\left(f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_q) \right) = rg\left(f(B_E) \right)$

2) Matrices d'une CL

Théorème: Soient : $\begin{cases} B_E \text{ base de } E \\ B_F \text{ base de } F \\ f, g \in \mathcal{L}(E,F) \\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{cases}$

Alors $\mathrm{Mat}_{B_F \leftarrow B_E}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{Mat}_{B_F \leftarrow B_E} f + \mu \mathrm{Mat}_{B_F \leftarrow B_E} g$

Demo notons $B_E = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$

$\mathrm{Mat}_{B_F \leftarrow B_E}(\lambda f + \mu g) = \left((\lambda f + \mu g)(\varepsilon_1)_{B_F}, \dots, (\lambda f + \mu g)(\varepsilon_q)_{B_F} \right) = \left((\lambda f(\varepsilon_1) + \mu g(\varepsilon_1))_{B_F}, \dots, (\lambda f(\varepsilon_q) + \dots)_{B_F} \right.$

$$= \left(\lambda\, f(\varepsilon_1)\big|_{B_F} + \mu\, g(\varepsilon_1)\big|_{B_F}, \dots, \lambda\, f(\varepsilon_q)\big|_{B_F} + \mu\, g(\varepsilon_q)\big|_{B_F} \right)$$ par linéarité de la décomposition

$$= \lambda \left(f(\varepsilon_1)\big|_{B_F} + \dots + f(\varepsilon_q)\big|_{B_F} \right) + \mu \left(g(\varepsilon_1)\big|_{B_F}, \dots, g(\varepsilon_q)\big|_{B_F} \right)$$ par déf d'une CL de matrices

$$= \lambda \operatorname{Mat}_{B_F \leftarrow B_E} f + \mu \operatorname{Mat}_{B_F \leftarrow B_E} g$$

Théorème

Soit $\begin{cases} B_E \text{ une base de } E \\ B_F \text{ une base de } F \end{cases}$

Alors $\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ f \mapsto \operatorname{Mat}_{B_F \leftarrow B_E} f \end{cases}$ est un isomorphisme

Demo: d'après les 2 th. précédents

Théorème $\dim \mathcal{L}(E,F) = p.q = \dim E . \dim F$

Demo: un iso préserve la dimension.

Corollaire $\dim(E^*) = \dim E$

$\downarrow$

$\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ formes linéaires

3) Matrice d'une composée

Lemme fondamental Soit $\begin{cases} B_E \text{ base de } E,\ B_F \text{ '' } F \\ f \in \mathcal{L}(E,F) \\ x \in E \end{cases}$

Alors $f(x)\big|_{B_F} = \left(\operatorname{Mat}_{B_F \leftarrow B_E} f\right) . x\big|_{B_E}$

Démo

Notons $\mathcal{B}_E = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ et $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_q \end{pmatrix} = \underset{\mathcal{B}_E}{x}$ ie $x = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_q \varepsilon_q$

$\left(\underset{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}{\text{Mat}} f\right) \times \underset{\mathcal{B}_E}{x} = \left(\underset{\mathcal{B}_F}{f(\varepsilon_1)}, \dots, \underset{\mathcal{B}_F}{f(\varepsilon_q)}\right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_q \end{pmatrix}$ par def

$= \Big(\underbrace{\lambda_1 \underset{\mathcal{B}_F}{f(\varepsilon_1)} + \dots + \lambda_q \underset{\mathcal{B}_F}{f(\varepsilon_q)}}_{\text{une seule colonne}} \Big)$ par def du pdt matriciel

$= \underset{\mathcal{B}_F}{\left(\lambda_1 f(\varepsilon_1) + \dots + \lambda_q f(\varepsilon_q) \right)} = \underset{\mathcal{B}_F}{f(\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_q \varepsilon_q)}$

Soit G un $\mathbb{K}$-ev de dim finie

Théorème Soit $\begin{cases} \mathcal{B}_E \text{ base de } E \\ \mathcal{B}_G \text{ base de } G \\ \mathcal{B}_F \text{ base de } F \end{cases}$, soit $\begin{cases} f \in \mathcal{L}(E,F) \\ g \in \mathcal{L}(F,G) \end{cases}$

Alors $\text{Mat}\ g \circ f = \underset{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_F}{\text{Mat}} g \times \underset{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}_F}{\text{Mat}} f$

Démo : Notons $\mathcal{B}_E = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$

$\underset{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_F}{\text{Mat}} g \cdot \underset{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}{\text{Mat}} f = \underset{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_F}{\text{Mat}} g \cdot \left(\underset{\mathcal{B}_F}{f(\varepsilon_1)}, \dots, \underset{\mathcal{B}_F}{f(\varepsilon_q)} \right)$

$= \underset{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_F}{\text{Mat}} g \cdot \underset{\mathcal{B}_F}{f(\varepsilon_1)} \dots \underset{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_F}{\text{Mat}} g \cdot \underset{\mathcal{B}_F}{f(\varepsilon_q)}$

$= \left(\underset{\mathcal{B}_G}{g(f(\varepsilon_1))} \dots \underset{\mathcal{B}_G}{g(f(\varepsilon_q))} \right)$ d'après le lemme fondamental

$= \underset{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_E}{\text{Mat}} g \circ f$

Théorème

Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f \end{cases}$$ est isomorphisme d'algèbre.

Corollaire

Soit $\begin{cases} \mathcal{B}_E \text{ base de } E \\ \mathcal{B}_F \text{ base de } F \end{cases}$ f est un isomorphisme de E dans F

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E} f^{-1} = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E} f)^{-1}$

4) Ex d'application

Si $\begin{cases} a_0, \dots, a_n \\ b_0, \dots, b_n \end{cases}$ soit n+1 scalaires tq $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $b_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i$

Alors $\forall k \in \{0, \dots, n\}$

$$a_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} b_i$$

Demo : on note $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) \end{cases}$, φ est linéaire, bijective de réciproque $\varphi^{-1} \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X-1) \end{cases}$

Or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}} \varphi = \begin{pmatrix} \varphi(1)_{\mathcal{C}}, \varphi(X)_{\mathcal{C}}, \dots, \varphi(X^n)_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{C}} & (X+1)_{\mathcal{C}} & (X+1)^2_{\mathcal{C}} \dots & (X+1)^n_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & & n \\ | & 0 & 1 & \cdots & \binom{n}{2} \\ | & | & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

(=> Transposée de Pascal)

$$= \left(\binom{j-1}{i-1} \right)_{i,j}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}\,\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(X) & \cdots & \varphi^{-1}(X^n) \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & X-1 & (X-1)^2 & \cdots & (X-1)^n \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & (-1)^{n+1} n \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & (-1)\binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \left((-1)^{i+j}\binom{j-1}{i-1}\right)_{i,j}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & & n \\ \vdots & 0 & 1 & & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & & (-1)^{n+1} n \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

En transposant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ 1 & n & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ (-1)^n & \cdots & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons $\forall k \in \{0,\dots,n\},\ b_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i$

i.e $\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = a_0 + a_1 \\ b_2 = a_0 + 2a_1 \\ \vdots \\ b_n = a_0 + na_1 + \binom{n}{2} a_2 + \dots + a_n \end{cases}$

ie $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 1 & n & \binom{n}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

On multiplie par l'inverse

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ (-1)^n & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ie $\forall k \in \{0, \dots, n\} \quad a_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} \binom{k}{i} b_i$

Formule d'inversion de Pascal

II. Changement de base

1) Formule de changement de base pour un vecteur

Théorème : Soient B_1, B_2 deux bases de E, $x \in E$

$$[x]_{B_1} = \mathrm{Mat}_{B_2 \leftarrow B_1} \mathrm{id}_E \times [x]_{B_1}$$

Demo cas particulier du lemme fondam $x = \mathrm{id}$

Ex: $E = \mathbb{R}^2$, $B_1 = \mathcal{C}$ $\quad B_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$[x]_{B_2} \overset{?}{=}$

M1 $\quad \mathrm{Mat}_{B_2 \leftarrow B_1} \mathrm{id} = \begin{pmatrix} [e_1]_{B_2} & [e_2]_{B_2} \end{pmatrix}$ on décompose en résolvant des systèmes

(Q2) $\underset{B_2 \leftarrow B_1}{\mathrm{Mat}}\, id = \left(\underset{B_1 \leftarrow B_2}{\mathrm{Mat}}\, id\right)^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} id\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix}\Big|_e & id\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Big|_e \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}\Big|_{B_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\9/2\end{pmatrix}$

En général $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\Big|_{B_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\x_1 + x_2\end{pmatrix}$

Def: La matrice $\underset{B_2 \leftarrow B_1}{\mathrm{Mat}}\, id$ (qui permet de passer des coordonnées ds la base B_1 aux coordonnées ds la base B_2) s'appelle matrice de passage de B_2 à B_1

On la note $P_{B_2}^{B_1}$

Théorème Une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow$ c'est une matrice de passage

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\Leftarrow$ Supposons il existe E, B_1, B_2 tq $P = P_{B_2}^{B_1}$

Alors $\underbrace{P_{B_2}^{B_1} P_{B_1}^{B_2}}_{\underset{B_2 \leftarrow B_2}{\mathrm{Mat}}\, id} = I_n = \underbrace{P_{B_1}^{B_2} \cdot P_{B_2}^{B_1}}_{\underset{B_1 \leftarrow B_1}{\mathrm{Mat}}\, id}$

$\Rightarrow$ Supposons $P \in \underbrace{GL_n}_{\text{inversible}}(\mathbb{K})$

$P = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\big|_e & C_2\big|_e & \cdots & C_n\big|_e \end{pmatrix}$

$rg(C_1, \dots, C_n) = rg(P) = n$ dc $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ est libre dc une base de $\mathbb{K}^n$

Notons $B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

On a $P = \begin{pmatrix} | & & | \\ id(C_1) & \cdots & id(C_n) \\ |_{\mathcal{E}} & & |_{\mathcal{E}} \end{pmatrix}$

$= \underset{\mathcal{E} \leftarrow B}{\mathrm{Mat}}\ id = P_{\varphi}^{B}$

2) Formule de changement de base pour une AL

Théorème : Soient $\begin{cases} B_{E_1}, B_{E_2} \text{ bases de } E \\ B_{F_1}, B_{F_2} \text{ base de } F \\ f \in \mathcal{L}(E, F) \end{cases}$

Alors

$$\underset{B_{F_2} \leftarrow B_{E_2}}{\mathrm{Mat}} f = P_{B_{F_2}}^{B_{F_1}} \cdot \underset{B_{F_1} \leftarrow B_{E_1}}{\mathrm{Mat}} f \cdot P_{B_{E_1}}^{B_{E_2}}$$

Corollaire Soient B_1, B_2 bases de E, $f \in \mathcal{L}(E)$

Alors

$$\underset{B_2}{\mathrm{Mat}} f = P_{B_2}^{B_1} \cdot \underset{B_1}{\mathrm{Mat}} f \cdot P_{B_1}^{B_2} = (P_{B_1}^{B_2})^{-1} \underset{B_2}{\mathrm{Mat}} f \cdot P_{B_1}^{B_2} = P_{B_2}^{B_1} \cdot \underset{B_2}{\mathrm{Mat}} f \cdot (P_{B_2}^{B_1})^{-1}$$

App: puissances d'une matrice

Ex: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ on veut calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n$

Notons $f_M : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$

Ainsi $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}\, f_M$ dc $M^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isomorphisme} \\ \text{d'algèbre}}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}\, f_M^n$

On a bien vu que $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base telle que $\mathrm{Mat}_B (f_M) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Donc $\mathrm{Mat}_B (f_M)^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Utilisons la formule

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f_M^n) = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_M^n) . P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

$$P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\ id = \left(id\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{|\mathcal{C}} \quad id\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{|\mathcal{C}} \right) = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{|\mathcal{C}} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{|\mathcal{C}} \right) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}(f_M^n) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(-1)^n & 3^n\\ (-1)^{n+1} & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(-1)^n+3^n & (-1)^{n+1}+3^n\\ (-1)^{n+1}+3^n & (-1)^{n+2}+3^n\end{pmatrix}$$

3) Matrices remarquables d'endo remarquables

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, soit $\mathcal{B}$ une base $\overset{qcq}{\text{de}}$ E (E est de dim q)

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda id_E) = \lambda I_q$$

Proposition Soient F, G deux supplémentaires de E et $p = p_F^G$ la projection sur F // à G

Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la somme directe

i.e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \sqcup \mathcal{B}_G$ avec $\begin{cases}\mathcal{B}_F \text{ base de } F\\ \mathcal{B}_G \text{ base de } G\end{cases}$

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix}1 & & & & (0)\\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots \ 0\end{pmatrix}$

$$= \left(\begin{array}{c|c} I_r & (0)\\ \hline (0) & (0)\end{array}\right) = J_r$$

Demo: Notons $\begin{cases}\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_r)\\ \mathcal{B}_G = (v_1, \dots, v_{q-r})\end{cases}$

$$\mathrm{Mat}_B(p) = \begin{pmatrix} p(u_1) & \dots & p(u_r) & p(v_1) & \dots & p(v_{q-r}) \end{pmatrix}$$

$u_1 \dots u_r \in F = \mathrm{Im}(p)$ dc $\forall i \leq r,\ p(u_i) = u_i$

$v_1 \dots v_{q-r} \in G = \mathrm{Ker}\, p$ dc $\forall i \leq q-r\ \ p(v_i) = 0_E$

Donc $\mathrm{Mat}_B\, p = \begin{pmatrix} u_1 \dots u_r & 0_E \dots 0_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ $\underbrace{\quad}_{rg(p)}$ 1 ligne r

Identité taille r

$$= \left(\begin{array}{c|c} I_r & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right) = J_r$$

Proposition

Soient F, G deux supplémentaires de E, $s = s_F^G$ la symétrie par rapport à $F // G$

Soit B une base adaptée à $F \oplus G = E$ i.e $B = B_F \cup B_G$

$$\mathrm{Mat}_B\, s = \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & (0) \\ \hline (0) & -I_{q-r} \end{array}\right)$$

Dems: Notons $\begin{cases} B_F = (u_1, \dots, u_r) \\ B_G = (v_1 \dots v_{q-r}) \end{cases}$

$$\mathrm{Mat}_B\, s = \begin{pmatrix} s(u_1), & \dots, & s(u_r), & s(v_1), & \dots & s(v_{q-r}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1, & \dots, & u_r, & -v_1, & \dots, & -v_{q-r} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

App: expression de la symétrie par rapport à $F // à\ G$

$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3,\ x + y = 0 \right\}$ $\qquad G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Une base de F est $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Notons s la symétrie

Une base de G est $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right)$

Dans la base adaptée $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right)$

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\, s = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}\, s = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\, s \cdot P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

$$P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\, \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}\, s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $s \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ -4x - 3y \\ 4x + 4y + z \end{pmatrix} \end{cases}$

II- Equivalence et similitude

1) Matrices équivalentes

Soient $M, N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

On dit que M est équivalente à N ou M et N sont équivalentes lorsqu'il existe $\begin{cases} P \in GL_p(\mathbb{K}) \\ Q \in GL_p(\mathbb{K}) \end{cases}$ tels que $N = PMQ$

⚠ C'est autre chose que l'équivalence par ligne / par colonne

↳ l'équivalence par lignes est le cas particulier $Q = I_q$

" colonnes " $P = I_p$

Proposition

La relation d'équivalente sur les matrices est une relation d'équivalence.

Demo

↳ Réflexivité : soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

Posons $\begin{cases} P = I_p \\ Q = I_q \end{cases}$

On a $PMQ = I_p M I_q = M$

↳ Symétrique : soient $M, N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et supposons que M équivaut à N.

Il existe $\begin{cases} P \in GL_p(\mathbb{K}) \\ Q \in GL_q(\mathbb{K}) \end{cases}$ tq $N = PMQ$

Alors, $\begin{cases} P^{-1} \in GL_p(\mathbb{K}) \\ Q^{-1} \in GL_q(\mathbb{K}) \end{cases}$ et $P^{-1} N Q^{-1} = M$

↳ Transitivité : soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

Supposons qu'il existe $\begin{cases} P \in GL_p(\mathbb{K}) \\ Q \in GL_q(\mathbb{K}) \end{cases}$ tq $A = PBQ$

et qu'il existe $\begin{cases} P' \in GL_p(\mathbb{K}) \\ Q' \in GL_q(\mathbb{K}) \end{cases}$ tq $B = P'CQ'$

Alors $A = PBQ = \underbrace{PP'}_{\in GL_p(\mathbb{K})} C \underbrace{Q'Q}_{\in GL_q(\mathbb{K})}$

Proposition

Deux matrices M, N sont équivalentes $\Leftrightarrow$ elles codent le même endomorphisme dans 2 couples de bases $\neq$.

i.e : $\begin{cases} \text{Il existe } E \text{ un } \mathbb{K}\text{-ev dim } q \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-ev dim } p \\ f \in \mathcal{L}(E,F) \\ B_E, B'_E \\ B_F, B'_F \end{cases}$

tq $\begin{cases} \underset{B_F \leftarrow B_E}{\mathrm{Mat}}\ f = M \\ \underset{B'_F \leftarrow B'_E}{\mathrm{Mat}}\ f = N \end{cases}$

Démo exo

Corollaire : 2 matrices équivalentes ont le même rang

Démo : M et N sont équivalentes, alors il existe $f \in \mathcal{L}(E,F)$, B_E, B'_E bases de E
B_F, B'_F " F

$\begin{cases} M = \underset{B_F \leftarrow B_E}{\mathrm{Mat}}\ f \\ N = \underset{B'_F \leftarrow B'_E}{\mathrm{Mat}}\ f \end{cases}$ dc $rg(M) = rg(f) = rg(N)$

Théorème décomposition J_r

Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $rg(M) = r$

Alors il existe $\begin{cases} P \in GL_p(\mathbb{K}) \\ Q \in GL_q(\mathbb{K}) \end{cases}$ tq $PMQ = J_r = \begin{array}{c} \\ r\{ \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{r} & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & \ddots \ 0 \end{pmatrix}$

Démo :

$f_M : \begin{cases} \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p \\ x \mapsto Mx \end{cases}$ est telle que $\underset{\mathcal{E}_p \leftarrow \mathcal{E}_q}{\mathrm{Mat}}\ f_M = M$

Notons S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f_M)$ et $B = B_S \sqcup B_K$ une base adaptée à $\mathrm{Ker}(f_M) \oplus S = \mathbb{R}^q$

Notons $B_S = (u_1, \dots, u_r)$

On a $\dim(S) = q - \mathrm{Ker} f_M = r$ d'après le th du rang

La famille $(f_M(u_1), \dots, f_M(u_r))$ est libre car $f_{M|S}^{|\mathrm{Im} f}$ est un isomorphisme, donc c'est une base de $\mathrm{Im} f_M$.

On la complète en une base $\tilde{B}$ de $\mathbb{R}^p$ et on a $\underset{\tilde{B} \leftarrow B}{\mathrm{Mat}}\ f = \left(\left. f_M(u_1) \right|_{\tilde{B}} \cdots \left. f_M(u_r) \right|_{\tilde{B}}\ f_M(v_1) \cdots \left. f_M(v_{q-r}) \right|_{\tilde{B}} \right)$

où $B_K = (v_1 \dots v_{q-r})$

$$= \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ f(u_1) & \cdots & f(u_r) & 0 & \cdots & 0 \\ |_{\tilde{B}} & & |_{\tilde{B}} & |_{\tilde{B}} & & |_{\tilde{B}} \end{pmatrix} = r\left\{ \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad \ddots \quad 1}^{r} & & (0) \\ (0) & 0 & \\ & & \ddots \quad 0 \end{pmatrix} \right.$$

Dc M et J_r sont équivalentes

Théorème

Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

$rg({}^tM) = rg(M)$

Demo

Notons $r = rg(M)$

M est de la forme $M = PJ_rQ$

${}^tM = {}^tQ\, {}^tJ_r\, {}^tP$

$= {}^tQ\, J_r\, {}^tP$

dc ${}^tM$ est équivalente à J_r, dc $rg({}^tM) = rg(J_r)$

dc $rg({}^tM) = r$

Théorème

Deux matrices et équivalentes $\Leftrightarrow rg(M) = rg(N)$

Demo

$\Rightarrow$ déjà fait

$\Leftarrow$ Supposons $rg(M) = rg(N) = r$

Alors M est équiv à J_r

N est équiv à J_r i.e J_r est équiv à N par symétrie

Dc M est équivalente à N par transitivité

2) Similitude

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que M est semblable à N qd $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $N = P^{-1}MP$

On le note $M \sim N$

Proposition

$\sim$ est une relation d'équivalence

Demo : $\hat{m}$ que page 6-7

Proposition

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$M \sim N \Leftrightarrow$ il existe $\begin{cases} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-ev de dim } n \\ f \in \mathcal{L}(E) \\ B_1, B_2 \text{ bases de } E \end{cases}$ tq $\begin{cases} \mathrm{Mat}_{B_1} f = M \\ \mathrm{Mat}_{B_2} f = N \end{cases}$

Rq : la similitude $\Rightarrow$ l'équivalence

Mais la réciproque est fausse

Ex $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ st équivalentes car elles ont le $\hat{m}$ rang

Mq elles sont semblables par l'absurde

Supposons $\exists P \in GL_2(\mathbb{K})$ tq $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$

i.e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{P . P^{-1}}_{= I_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = (0)$ impossible !!!