Limites des fonctions réelles

Dans cette feuille, sauf mention explicite du contraire, I dénotera un intervalle ou une réunion d'intervalles non triviaux.
On rappelle qu'une fonction $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur I lorsque pour tout point $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{a} f$ existe (et vaut donc $f(a)$).

Mains dans le cambouis

Exercice 1. *Facile ?*
On suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ a pour limite $\ell \in]0, +\infty[$ en un point a adhérent à I.
Montrer qu'on a $f(x) > \dfrac{\ell}{2}$ au voisinage de a.

Exercice 2. *Limite en $+\infty$ d'une fonction périodique*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique telle que $\lim\limits_{+\infty} f$ existe. Montrer que f est constante.

Exercice 3.
Soit f la fonction définie sur $[0, 2]$ par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 2 - x \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer qu'il existe un unique a de l'intervalle $]0, 2[$ tel que f admette une limite en ce point, et déterminer celle-ci.
Faites un dessin (mais ne vous en contentez pas) !

Utilisation du TLM, des PAL ou de la CSC

Exercice 4.
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que f est croissante mais $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue.
Donner aussi un exemple, histoire de vérifier que ces bêtes-là existent.

Exercice 5. *Quelques limites*
Calculer les limites suivantes ou montrer qu'elles n'existent pas (on pourra utiliser tous les résultats déjà connus) :

1. $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

Exercice 6. *Équations fonctionnelles à inconnue continue*

1. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.
3. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \mathrm{e}^x \cos(x) f(x)$.

EX$^{\underline{n}}$ LIM

1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_a f = \ell \in]0, +\infty[$

<u>1er cas</u> $(a \in \mathbb{R})$:

Par définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

On pose $\varepsilon := \frac{\ell}{2}$

$\ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \frac{\ell}{2}$ en particulier $\boxed{f(x) > \frac{\ell}{2}}$

<u>2^{e} cas</u> $(a = +\infty)$:

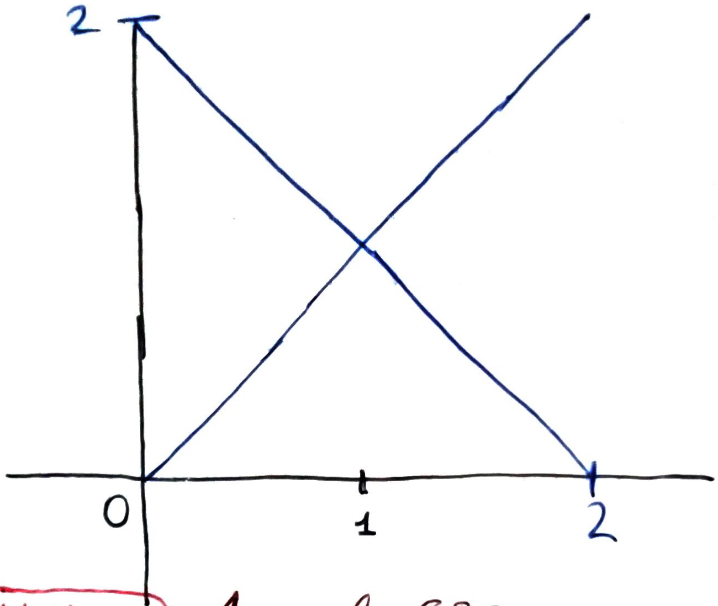
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in I,\ x < B \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

De même, $\varepsilon = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \boxed{f(x) > \frac{\ell}{2}}$

<u>3^{e} cas</u> $(a = -\infty)$:

idem

3/1



Meth 1 Avec la CSC, mais pas besoin.

Montrons $f \xrightarrow[1]{} 1$. Soit $u \in \,]0, 2[^{\mathbb{N}}$.

Supposons $u \longrightarrow 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, |u_n - 1| < \varepsilon$.

Soit $n \geq n_0$

<u>1er cas</u> ($u_n \in \mathbb{Q}$):

$f(u_n) - 1 = u_n - 1$ donc $|f(u_n) - 1| < \varepsilon$

<u>2e cas</u> ($u_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$):

$f(u_n) = 2 - u_n$

$\Leftrightarrow f(u_n) - 1 = -(u_n - 1)$

$\Rightarrow |f(u_n) - 1| = |u_n - 1|$

donc $|f(u_n) - 1| < \varepsilon$

Par déf. de la limite $f(u_n) \xrightarrow[1]{} 1$

Par CSC, $f \in \mathcal{C}(\{1\}, \mathbb{R})$

Meth 2 Sans CSC

Montrons $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]0, 2[, |x-1| < \eta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $\eta = \varepsilon$.

Soit $x \in]0, 2[$

Supposons $|x-1| < \eta$ ie $|x-1| < \varepsilon$

1er cas ($x \in \mathbb{Q}$):

$1 - \eta < x < 1 + \eta$

$\Leftrightarrow 1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$

$\Leftrightarrow 1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon$

donc $|f(x) - 1| < \varepsilon$

2e cas ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$):

$\Leftrightarrow 1 - \eta < x < \eta + 1$

$\Leftrightarrow -\eta - 1 < -x < \eta - 1$

$\Leftrightarrow -\eta < 1 - x < \eta$

$\Leftrightarrow -\varepsilon < 1 - x < \varepsilon$

$\Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - 1 < \varepsilon$

donc $|f(x) - 1| < \varepsilon$

$\boxed{3/2}$

Soit $a \in [0, 2] \setminus \{1\}$ ie tel que $2 - a \neq a$

ie $f(a) \neq a$

$\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tq $u \longrightarrow a$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ———————————— $v \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ tq $v \longrightarrow a$

$f(u_n) = u_n \longrightarrow a$

$f(v_n) = 2 - v_n \longrightarrow 2 - a$ par PAL

et $a \neq 2-a$ par CSC contraposée,

$f \notin \mathcal{C}(\{a\}, \mathbb{R})$

EX $\underline{M}$ LIM

$\boxed{4}$ Mtq $f \in \mathcal{C}$ ie $\forall a \in]0, +\infty[$

ie $\lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f = f(a)$

Soit $a \in]0, +\infty[$

Notons $\begin{cases} \ell_1 = \lim\limits_{a^+} f \\ \ell_2 = \lim\limits_{a^-} \end{cases}$

ℓ_1, ℓ_2 existent par TLM

car $f \in \nearrow$ et on a

$$\ell_2 \leq f(a) \leq \ell_1$$

$x \mapsto \dfrac{f(x)}{x} \in \searrow$ donc $\begin{cases} \lim\limits_{a^+} \dfrac{f}{id} \text{ existe} \\ \lim\limits_{a^-} \dfrac{f}{id} \text{ existe} \\ \lim\limits_{a^+} \dfrac{f}{id} \leq \dfrac{f(a)}{a} \leq \lim\limits_{a^-} \dfrac{f}{id} \end{cases}$

Or, par PAL, et en $a \neq 0$, $\quad \dfrac{\ell_1}{a} \leq \dfrac{f(a)}{a} \leq \dfrac{\ell_2}{a}$

en $a > 0$ $\iff \ell_1 \leq f(a) \leq \ell_2$

Ainsi, par (A), on a bien $\ell_1 = \ell_2 = f(a)$

ie $f \in \mathcal{C}(\{a\} \ldots)$

ex
- $f = x \mapsto \text{TREE}(3) \in \nearrow$ et $\dfrac{f}{id} = \dfrac{\text{TREE}(3)}{id} \in \searrow$
- $f = id + 1$
- $f = \ln \circ (id + 2)$

$\boxed{5/1/0}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{1}{x} - 1 < f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{1 - x}_{\xrightarrow[0^+]{} 1} < x f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \underbrace{1}_{\xrightarrow[0^+]{} 1}$$

Par TdG, $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow[0^+]{} 1$

Pour $x < 0$

$$1 - x > x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 1$$

Par TdG

$$\lim_{0^-} \mathrm{id} \cdot \left\lfloor \frac{1}{\mathrm{id}} \right\rfloor = 1$$

donc $\mathrm{id} \cdot \left\lfloor \frac{1}{\mathrm{id}} \right\rfloor \xrightarrow[0]{} 1$

$\boxed{5/2/0^+}$

$$\lim_{0^+} \mathrm{id} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{0^+} \ln \circ \left(1 + \frac{1}{\mathrm{id}}\right) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{0^+} 1 + \frac{1}{\mathrm{id}} = +\infty$$

On a
$$\mathrm{id} \cdot \ln \circ \left(1 + \frac{1}{\mathrm{id}}\right) = \mathrm{id} \cdot \ln \circ \left(\frac{1 + \mathrm{id}}{\mathrm{id}}\right)$$
$$= \mathrm{id} \cdot \left(\ln \circ (1 + \mathrm{id}) - \ln\right)$$
$$= \underbrace{\mathrm{id} \cdot \ln \circ (1 + \mathrm{id})}_{\xrightarrow[0]{} 0} - \underbrace{\mathrm{id} \cdot \ln}_{\xrightarrow[0]{} 0} = 0$$

donc $\displaystyle\lim_{0^+} e^{\mathrm{id} \cdot \ln \circ \left(1 + \frac{1}{\mathrm{id}}\right)} = e^0 = 1$ car $\exp \in \mathcal{C}(\{0\}, \mathbb{R})$

$\boxed{5/3/0^+}$

$$\lim_{0^+} \mathrm{Id}^2 \cdot \sin \circ \frac{1}{\mathrm{Id}^3} \Leftrightarrow -1 \leqslant \sin \circ \frac{1}{\mathrm{Id}^3} \leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\mathrm{Id}^2}_{\to 0} \leqslant \mathrm{Id}^2 \cdot \sin \circ \frac{1}{\mathrm{Id}^3} \leqslant \underbrace{\mathrm{Id}^2}_{\to 0}$$

Donc par TdG

$$\lim_{0^+} \mathrm{Id}^2 \cdot \sin \circ \frac{1}{\mathrm{Id}^3} = 0$$

$\boxed{5/1/+\infty}$

Pour $x > 1$ on a $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$ donc $x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$

donc $\lim_{+\infty} \mathrm{Id} \cdot \lfloor \frac{1}{\mathrm{Id}} \rfloor = 0$ Au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{Id} \cdot \lfloor \frac{1}{\mathrm{Id}} \rfloor = 0$

$\boxed{5/2/+\infty}$

$\frac{1}{\mathrm{Id}^3} \xrightarrow[\infty]{} 0$ on peut effectuer un DL

$$\mathrm{Id}^2 \cdot \sin \circ \frac{1}{\mathrm{Id}^3} = \mathrm{Id}^2 \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{Id}^3} + \frac{1}{\mathrm{Id}^3} \cdot \varepsilon \circ \frac{1}{\mathrm{Id}^3} \right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Id}} + \frac{1}{\mathrm{Id}} \cdot \varepsilon \circ \frac{1}{\mathrm{Id}^3}$$

$$\xrightarrow[+\infty]{} 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Id}}\right)^{\mathrm{Id}} = \exp \circ \left(\mathrm{Id} \cdot \ln \circ \left(1 + \frac{1}{\mathrm{Id}}\right)\right) \qquad \frac{1}{\mathrm{Id}} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

DL_1 de $\ln$, $\ln \circ \left(1 + \frac{1}{\mathrm{Id}}\right) = \frac{1}{\mathrm{Id}} + \frac{1}{\mathrm{Id}} \cdot \varepsilon \circ \frac{1}{\mathrm{Id}}$

d'où $\exp \circ \left(\mathrm{Id} \cdot \ln \circ \left(1 + \frac{1}{\mathrm{Id}}\right)\right) = e \cdot e \circ \varepsilon \circ \frac{1}{\mathrm{Id}}$

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow[+\infty]{} e$ car $\exp \in \mathcal{C}(\{0\}, \mathbb{R})$

EXMLIM

$\boxed{6/1}$ Déterminons $\{f \in \mathcal{C}, (\forall x,y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)+f(y)\}$

par A - S

Meth 1

<u>Analyse</u> (considérons une fonction f convenable):

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que par récurrence qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x)$

$$f(2x) = f(x+x) = f(x)+f(x) = 2f(x)$$
$$f(3x) = f(2x+x) = f(2x)+f(x) = 3f(x).$$

<u>Init</u> (Pour $n=0$):

$$f(0x) = f(0).$$

En particularisant $(*)$ pour $x=y=0$ on trouves

$$f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$$

Ainsi $f(0x) = 0x$

<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f(nx) = nf(x)$.

Alors
$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx+x) \\ &= f(nx)+f(x) && \text{d'après } (*) \\ &= nf(x)+f(x) && \text{par hdr} \\ &= (n+1)f(x) \end{aligned}$$

La propriété est héréditè

Conclusion ...

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons $\forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Traitons deux cas:

1er cas ($n \in \mathbb{N}$): OK

2e cas ($n \in -\mathbb{N}$): On a $n = -|n|$

En particularisant pour $y = -x = |n|$ on trouve

$$f(0) = f(x) + f(-x)$$

Ainsi $f(-x) = f(0) - f(x) = -f(x)$

Ceci étant vrai pour tout réel x, $f \in \mathcal{I}$

donc ici $f(nx) = f(-|n|x) = -f(|n|x)$

$$= -|n| f(x)$$

$$= nf(x)$$

Montrons $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$

Soit $r \in \mathbb{Q}$. On peut écrire sous la forme $r = \frac{p}{q}$

avec $\begin{cases} p \in \mathbb{Z} \\ q \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

$f(r) = f(p \cdot \frac{1}{q}) = pf(\frac{1}{q})$; $f(1) = f(q \frac{1}{p}) = qf(\frac{1}{q})$

d'où $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q} f(1)$

d'où $f(r) = p f(\frac{1}{q}) = \frac{p}{q} f(1) = r f(1)$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Par CSD il existe une suite $r \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tq $r \to x$

d'où $f \circ r(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(n)$.

d'après ce qui précède :

$f \circ r = r \cdot f(1) \longrightarrow x f(1)$ par PAL

Par ! de lim, $\boxed{f(x) = x f(1)}$

Ainsi f est de la forme $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda x \end{cases}$ (ici $\lambda = f(1)$)

<u>Synthèse</u> les fonctions linéaires conviennent

<u>Conclusion</u>

$$S = \left\{ \lambda \, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Meth 2

Analyse (considérons une f convenable) :

On a $f \in \mathcal{C}$ donc $\int f$ existe. On note $F := \int f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$

On intègre entre 0 et 1 $\int_0^1 f(x+y)\,dy = \int_0^1 (f(x) + f(y))\,dx$

$$\int_0^1 f(x+y)\,dy \qquad \text{Posons } t = x+y \Leftrightarrow y = t - x$$

$$= \int_x^{x+1} f(t)\,dt \qquad 0 \xrightarrow{y} 1 \Leftrightarrow x \xrightarrow{t} x+1$$

$$\frac{dt}{dy} = 1 \Leftrightarrow dt = dy$$

$$= F(x+1) - F(x)$$

$Id - x \in \mathcal{C}^1$ donc par ch. de var.

$$\int_0^1 (f(x) + f(y))\,dy = \int_0^1 f(x)\,dy + \int_0^1 f(y)\,dy$$

$$= F(x) + F(1) - F(0)$$

donc

$$f(x) = \underbrace{F(x+1)}_{\in \mathcal{C}^1} - \underbrace{F(x)}_{\in \mathcal{C}^1} - \underbrace{F(1) + F(0)}_{\in \mathcal{C}^1}$$

donc $f \in \mathcal{C}^1$ par thm généraux

Ainsi $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \frac{d}{dx}(f(x+y)) = \frac{d}{dx}(f(x) + f(y))$

ie $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ f'(x+y) = f'(x)$

Pour $x = 0$: $\forall y \in \mathbb{R} \ f'(y) = f'(0)$

donc f' est constante

donc f est affine.

<u>Synthèse</u> (Testons nos candidats):

$f = a \cdot Id_{\mathbb{R}} + b$ est solution ssi $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ a(x+y) + b = ax + b + ay + b$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, \ b = 2b \Leftrightarrow b = 0$

$\boxed{6/2}$ $\{f \in \mathcal{C},\ f\circ(2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = f\}$

Analyse. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$f(t) = f(t/2) = f\left(\frac{t}{4}\right) = f\left(\frac{t}{8}\right) = \cdots = f\left(\frac{t}{2^n}\right)$$ par récurrence immédiate

$\frac{t}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc par CSC $f\left(\frac{t}{2^n}\right) \to f(0)$ car $f \in \mathcal{C}(\{0\},..)$

Or $f\left(\frac{t}{2^n}\right) = f(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$.

Par ! de lim, $f(t) = f(0)$ donc f est constante.

Réciproquement, les constantes sont bien solution. On a

$$\{f\in\mathcal{C},\ f\circ(2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = f\} = \{x \mapsto c,\ c \in \mathbb{R}\}$$

$\boxed{6/3}$ $\{f \in \mathcal{C},\ f\circ(2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = f\cdot\exp\cdot\cos\}$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(t) &= f\left(\tfrac{t}{2}\right) e^{\frac{t}{2}} \cos\tfrac{t}{2} \\ &= f\left(\tfrac{t}{4}\right) e^{\frac{t}{2}} e^{\frac{t}{4}} \cos\tfrac{t}{2} \cos\tfrac{t}{4} \\ &= f\left(\tfrac{t}{8}\right) e^{\frac{t}{2}} e^{\frac{t}{4}} e^{\frac{t}{8}} \cos\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{t}{4}\cos\tfrac{t}{8} \\ &\ \vdots \\ &= f\left(\tfrac{t}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\tfrac{t}{2^k}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\tfrac{t}{2^k}\right) \end{aligned}$$ par récurrence im.

$$\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{t}{2^k}} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t}{2^k}\right) = \exp\left(t \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = e^{t\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{t}{2^k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(t/2^{k-1})}{2\sin(t/2^k)} = \frac{\sin t}{2^n \sin(t/2^n)}$$ pour $t \neq 0$ et n assez grand

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\cancel{1-\frac{1}{2}}}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ainsi:

$$f(t) = f\left(\frac{t}{2^n}\right) e^{t\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\sin \frac{t}{2^n}}{\frac{t}{2^n}}}$$ pour $t \neq 0$ et n assez grand

$f\left(\frac{t}{2^n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(0)$ par CSC

$e^{t/2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^t$ par PAL

$$\frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\sin \frac{t}{2^n}}{\frac{t}{2^n}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\sin t}{t}$$

Par PAL, $f(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(0) \cdot e^t \frac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$

Par ! de lim,

$$f(t) = \begin{cases} f(0) e^t \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ f(0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Cette fonction f est donc de la forme:

$$t \mapsto \begin{cases} \left(\lambda \exp \cdot \frac{\sin}{\mathrm{id}}\right)(t) & \text{si } t \neq 0 \\ \lambda & \text{sinon} \end{cases}$$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et une telle fct est bien $\mathcal{C}$ car $\lambda e^x \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \lambda$

Réciproquement, ces fonctions sont bien solutions :

$$f(2x) = \lambda e^{2x} \frac{\sin(2x)}{2x}$$

$$= \lambda e^{x} e^{x} \frac{\cancel{2} \sin(2x) \cos(2x)}{\cancel{2} x}$$

$$= \lambda e^{x} \frac{\sin x}{x} e^{x} \cos x$$

$$= f(x) e^{x} \cos x$$