Limites d'une fonction.

Contexte : dans tout le chapitre

- I désigne une réunion d'intervalles non triviaux, par exemple $[1, 2[$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $D_{\tan}$;
- $f : I \to \mathbb{R}$ désigne une application de I dans $\mathbb{R}$;
- a désigne un point adhérent à I.

La notion de point adhérent est présentée dans la partie I.1., mais pour une réunion d'intervalles non triviaux on peut simplement dire qu'un point adhérent à I est ou bien un élément de I ou bien une extrémité de I.
Par exemple l'ensemble des points adhérents à $]-1, 2] \cup]3, +\infty[$ est $[-1, 2] \cup [3, +\infty]$.

I Voisinages

I.1 Définition

Définition 1 : Voisinage.

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de α tout ensemble V_α vérifiant $\exists \varepsilon > 0,\ ]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[\subset V_\alpha$.
2. Si $\alpha = +\infty$, on appelle voisinage de α tout ensemble $V_{+\infty}$ vérifiant $\exists A \in \mathbb{R},\ ]A, +\infty[\subset V_{+\infty}$.
3. Si $\alpha = -\infty$, on appelle voisinage de α tout ensemble $V_{-\infty}$ vérifiant $\exists B \in \mathbb{R},\ ]-\infty, B[\subset V_{-\infty}$.

Notation 1 Pour écrire des énoncés formels portant sur les voisinages, notons $\boldsymbol{\mathcal{V}_a}$ l'ensemble des voisinages de a.

Définition 2 : Point adhérent.

On dit que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est un point adhérent à I lorsque tout voisinage de a rencontre I.

Autrement dit : pour tout voisinage V_a de a, on a $V_a \cap I \neq \emptyset$.

On note $\overline{I}$ l'ensemble des points adhérents à I.

I.2 Propriétés des voisinages

Remarque 1

Une partie $P \subset \mathbb{R}$ est voisinage de chacun de ses éléments si et seulement si ....

Proposition 1 : Intersection.

Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, l'intersection de deux voisinages de α est un voisinage de α.

Proposition 2 : Séparation.

Soient $\alpha \neq \beta$ deux éléments distincts de $\overline{\mathbb{R}}$.

Alors il existe un voisinage V_α de α et un voisinage V_β de β tels que $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$.

I.3 Propriétés locales

Définition 3 .

On dit qu'une propriété $P(f)$ portant sur f est vraie au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage de a sur lequel la propriété est vraie, i. e. pour lequel $P(f_{|V_\alpha})$ est vraie.

Définition 4 .

On dit que f atteint un extremum local (maximum local ou minimum local) en $x_0 \in I$ lorsqu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f(x_0)$ est un extremum (maximum ou minimum) de f.

II Limites

II.1 Définition

Définition 5 .

On dit que <u>f a pour limite ℓ en a</u> et on note $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ lorsque la propriété suivante est vérifiée : pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe un voisinage V_a de a tel que $\forall x \in I \cap V_a,\ f(x) \in V_\ell$.

Remarque 2

Cette définition est la définition **francophone** de la limite. En particulier, si f est définie en a (*i. e.* $a \in I$ et pas seulement $a \in \overline{I}$) et que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, alors nécessairement $\ell = f(a)$ (la réciproque étant fausse).

Par exemple l'application $\chi_{\{0\}} = x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ n'a pas de limite en 0. On verra plus bas la version anglophone.

Dessin :

Théorème 1 : Unicité de la limite.

Si f a une limite en a alors cette limite est unique, on la note alors $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(a)$.

Notation 2 Sous réserve d'existence, on notera donc $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ l'unique limite de f en a.

Définition 6 : Limites à gauche, à droite.

1. On dit que <u>f a pour limite à gauche ℓ en a</u> et on note $f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell$ lorsqu'on a $f_{|I \cap]-\infty, a[} \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.
2. On dit que <u>f a pour limite à droite ℓ en a</u> et on note $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ lorsqu'on a $f_{|I \cap]a, +\infty[} \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

Notation 3 L'unicité de la limite implique l'unicité des limites à gauche et à droite. Sous réserve d'existence, on notera donc $\ell = \lim\limits_{a^-} f$ ou $\ell = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ pour $f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell$; et $\ell = \lim\limits_{a^+} f$ ou $\ell = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ pour $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 3 : Lien avec les limites.

On a deux cas :

1. Si $a \notin I$, alors : $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \iff f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell$ et $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell$.
2. Si $a \in I$, alors : $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \iff f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell$ et $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell$ et $f(a) = \ell$.

Remarque 3

Si le second point vous perturbe (sait-on jamais) et que vous auriez voulu que $\chi_{\{0\}} = x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ ait une limite en 0, c'est que vous avez en tête la **version anglo-saxonne** de la définition de la limite. Avec le vocabulaire francophone, on parle de **limite épointée** : <u>f a pour limite épointée ℓ en a</u> lorsque $f_{|I \setminus \{a\}} \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

Évidemment, dans le cas où $a \notin I$, limite et limite épointée coïncident.

II.2 Critères d'existence de limite

Théorème 2 .

Si f a une limite finie en a, alors f est bornée **au voisinage de a**.

Théorème 3 : TLM, version fonctions.

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ **croissante** et $a \in \overline{I}$. Alors :

i. Si f est définie à gauche en a, $\lim\limits_{a^-} f$ existe.

ii. Si f est définie à droite en a, $\lim\limits_{a^+} f$ existe.

iii. Toutes les inégalités suivantes sont vraies lorsqu'elles ont un sens : $\lim\limits_{a^-} f \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{a^+} f$.

Énoncé analogue pour f décroissante.

Remarque 4
Pour le troisième point, si par exemple la fonction est définie au voisinage de a sauf en a, on a seulement $\lim\limits_{a^-} f \leqslant \lim\limits_{a^+} f$. Si la fonction est définie à droite de a et en a, mais pas à gauche de a, on a seulement $f(a) \leqslant \lim\limits_{a^+} f$. Etc.

Théorème 4 : TDG, version fonctions.

Soient f, g, h trois fonctions comme la fonction f du préambule.

a. Convergence par encadrement : supposons $\begin{cases} f \leqslant g \leqslant h \text{ au voisinage de } a \\ \exists \ell \in \mathbb{R},\ f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \text{ et } h \underset{a}{\longrightarrow} \ell. \end{cases}$ Alors $g \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

b. Divergence par minoration : supposons $\begin{cases} f \leqslant g \text{ au voisinage de } a \\ f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty. \end{cases}$ Alors $g \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$.

Divergence par majoration : supposons $\begin{cases} g \leqslant h \text{ au voisinage de } a \\ h \underset{a}{\longrightarrow} -\infty. \end{cases}$ Alors $g \underset{a}{\longrightarrow} -\infty$.

II.3 Opérations sur les limites

Théorème 5 : Opérations algébriques sur les limites.

Soient f, g comme dans le préambule ; $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$; et $\square \in \{+, -, \times, \div\}$.

Supposons qu'on ait $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$, qu'on ait $g \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$, et que $\ell_1 \square \ell_2$ ait un sens.

Alors $f \square g \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1 \square \ell_2$.

Théorème 6 : Compositions de limites.

Soient I et J deux réunions d'intervalles non triviaux, $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $\begin{cases} f : I \to J \\ g : J \to \mathbb{R} \end{cases}$, telles que $\begin{cases} \lim\limits_{a} f = b \\ \lim\limits_{b} g = c. \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{a} g \circ f = c$.

Remarque 5

On voit là la grande force de la version francophone de la limite. Pour obtenir une version de ce théorème qui reste vraie avec la version anglophone, il faut se contorsionner.

II.4 Caractérisation séquentielle de la limite et applications

Théorème 7 : Caractérisation séquentielle de la limite.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$;

ii. $\forall (u_n)_{\in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}},\ u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to \ell$.

Remarque 6

En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, on peut redémontrer les théorèmes précédents (opérations algébriques, composition, TdG, et même TLM) plus facilement qu'à l'aide de la définition !

Théorème 8 : Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

Si $f \leqslant g$ au voisinage de a et qu'on a $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$ alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.