Limites d'une fonction.

Contexte : dans tout le chapitre

- I désigne une réunion d'intervalles non triviaux, par exemple $[1, 2[$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $D_{\tan}$;
- $f : I \to \mathbb{R}$ désigne une application de I dans $\mathbb{R}$;
- a désigne un point adhérent à I.

La notion de point adhérent est présentée dans la partie I.1., mais pour une réunion d'intervalles non triviaux on peut simplement dire qu'un point adhérent à I est ou bien un élément de I ou bien une extrémité de I.
Par exemple l'ensemble des points adhérents à $]-1, 2]\cup]3, +\infty[$ est $[-1, 2] \cup [3, +\infty]$.

I Voisinages

I.1 Définition

L'idée : un voisinage de α doit être une partie de $\mathbb{R}$, aussi petite qu'on veut mais "débordant un peu autour de α".

Définition 1 : Voisinage.

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de α tout ensemble V_α vérifiant $\exists \varepsilon > 0,\ ]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[\subset V_\alpha$.
2. Si $\alpha = +\infty$, on appelle voisinage de α tout ensemble $V_{+\infty}$ vérifiant $\exists A \in \mathbb{R},\ ]A, +\infty[\subset V_{+\infty}$.
3. Si $\alpha = -\infty$, on appelle voisinage de α tout ensemble $V_{-\infty}$ vérifiant $\exists B \in \mathbb{R},\ ]-\infty, B[\subset V_{-\infty}$.

Application 1 On a donc une version **unifiée** de la définition de la limite d'une suite en passant par les voisinages :
$u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si ....

....

Notation 1 Pour écrire des énoncés formels portant sur les voisinages, notons $\boldsymbol{\mathcal{V}_a}$ l'ensemble des voisinages de a.

Définition 2 : Point adhérent.

On dit que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est un point adhérent à I lorsque tout voisinage de a rencontre I.
Autrement dit : pour tout voisinage V_a de a, on a $V_a \cap I \neq \emptyset$.
On note $\overline{I}$ l'ensemble des points adhérents à I.

Exemples 1

1. Il est clair que tout élément de I est un point adhérent à I.
2. Il est clair qu'on a bien $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, la notation est donc cohérente.
3. Pour l'exemple $I =]-1, 2]\cup]3, +\infty[$ du préambule, on vérifie sans peine qu'on a bien $\overline{I} = [-1, 2] \cup [3, +\infty]$.

Les points a adhérents à I sont les réels pour lesquels "ça a un sens de regarder si f a une limite en a".

I.2 Propriétés des voisinages

Remarque 1

Une partie $P \subset \mathbb{R}$ est voisinage de chacun de ses éléments si et seulement si ....

Les propriétés suivantes seront utiles pour la suite.

Proposition 1 : Intersection.

Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, l'intersection de deux voisinages de α est un voisinage de α.

Démonstration. Soient V_1, V_2 deux voisinages de α. Trois cas :

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$: il existe ε_1, ε_2 tels que $]\alpha - \varepsilon_1, \alpha + \varepsilon_1[\subset V_1$ et $]\alpha - \varepsilon_2, \alpha + \varepsilon_2[\subset V_2$.
   On pose $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et on a $]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[\subset V_1 \cap V_2$.
2. Pour $\alpha = +\infty$: il existe A_1, A_2 tels que $]A_1, +\infty[\subset V_1$ et $]A_2, +\infty[\subset V_2$.
   On pose $A = \max(A_1, A_2)$ et on a $]A, +\infty[\subset V_1 \cap V_2$.
3. Pour $\alpha = -\infty$: pareil. Exercice, si ce n'est pas évident. □

Proposition 2 : Séparation.

Soient $\alpha \neq \beta$ deux éléments distincts de $\overline{\mathbb{R}}$.

Alors il existe un voisinage V_α de α et un voisinage V_β de β tels que $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$.

Démonstration. À renommage près on peut supposer $\alpha < \beta$. On a quatre cas :

1. Pour $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$: on prend $V_\alpha =]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$ et $V_\beta =]\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon[$ avec $\varepsilon = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$.
2. Pour $-\infty = \alpha < \beta < +\infty$: on prend $V_\alpha =]-\infty, \beta - 1[$ et $V_\beta =]\beta - 1, \beta + 1[$.
3. Pour $-\infty < \alpha < \beta = +\infty$: on prend $V_\alpha =]\alpha - 1, \alpha + 1[$ et $V_\beta =]\alpha + 1, +\infty[$.
4. Pour $-\infty = \alpha, \beta = +\infty$: on prend $V_\alpha = \mathbb{R}_+^*$ et $V_\beta = \mathbb{R}_-^*$. □

I.3 Propriétés locales

Définition 3 .

On dit qu'une propriété $P(f)$ portant sur f est vraie au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage de a sur lequel la propriété est vraie, i. e. pour lequel $P(f_{|V_\alpha})$ est vraie.

Exemples 2

1. La fonction sinus est-elle croissante au voisinage de 0 ?

   ....

2. La fonction sinus est-elle croissante au voisinage de $\frac{\pi}{2}$?

   ....

3. La fonction sinus est-elle positive au voisinage de 0 ?

   ....

4. La fonction sinus est-elle positive au voisinage de $\frac{\pi}{2}$?

   ....

5. La fonction inverse est-elle positive au voisinage de 0 ?

   ....

6. La fonction inverse est-elle positive au voisinage de $+\infty$?

   ....

Définition 4 .

On dit que f atteint un extremum local (maximum local ou minimum local) en $x_0 \in I$ lorsqu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f(x_0)$ est un extremum (maximum ou minimum) de f.

Exemple 3 Considérons la fonction $x \mapsto x^3 - 3x + 2$. L'étude révèle deux extrema **locaux** :

II Limites

II.1 Définition

Définition 5 .

On dit que <u>f a pour limite ℓ en a</u> et on note $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ lorsque la propriété suivante est vérifiée : pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe un voisinage V_a de a tel que $\forall x \in I \cap V_a,\ f(x) \in V_\ell$.

Il y a concrètement 9 cas possibles suivants que $a \begin{cases} \text{est fini} \\ \text{est } +\infty \\ \text{est } -\infty \end{cases}$ et $\ell \begin{cases} \text{est fini} \\ \text{est } +\infty \\ \text{est } -\infty \end{cases}$.

Exercice 1. En déduire les 9 énoncés possibles.

Cet exercice est corrigé dans les 9 lignes qui suivent. Il est **vivement conseillé** de le faire et refaire en aveugle avec un camarade jusqu'à ce que ça rentre.

1. a fini et ℓ fini : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$.
2. $a = +\infty$ et ℓ fini : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ x > A \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$.
3. $a = -\infty$ et ℓ fini : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in I,\ x < B \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$.
4. a fini et $\ell = +\infty$: $\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$.
5. $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$: $\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ x > \alpha \Rightarrow f(x) > A$.
6. $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$: $\forall A > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in I,\ x < B \Rightarrow f(x) > A$.
7. a fini et $\ell = -\infty$: $\forall B < 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) < B$.
8. $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$: $\forall B < 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ x > A \Rightarrow f(x) < B$.
9. $a = -\infty$ et $\ell = -\infty$: $\forall B < 0,\ \exists \beta < 0,\ \forall x \in I,\ x < \beta \Rightarrow f(x) < B$.

Parmi les intérêts de l'entraînement : on ne peut exclure qu'il y ait des coquilles (donc des plus) dans ces 9 lignes.

<u>Plus succintement</u>

$$\forall L \begin{cases} > 0 & \text{si } l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\} \\ < 0 & \text{sinon} \end{cases},\ \exists A \begin{cases} > 0 & \text{si } l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\} \\ < 0 & \text{sinon} \end{cases},\ \forall x \in I,\ \begin{cases} |x-a| < A & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ x > A & \text{si } a = +\infty \\ x < A & \text{sinon} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |f(x)-l| < L & \text{si } l \in \mathbb{R} \\ f(x) > L & \text{si } l = +\infty \\ f(x) < L & \text{sinon} \end{cases}$$

.

<u>Version cerveau cosmique</u>

$$\Xi := \begin{cases} \overline{\mathbb{R}} & \to \{\mathbb{R}_+^\times, \mathbb{R}_-^\times\} \\ l & \mapsto \begin{cases} \mathbb{R}_-^\times & \text{si } l = -\infty \\ \mathbb{R}_+^\times & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

$$f \underset{a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \forall L \in \Xi(l), \exists A \in \Xi(a), \forall x \in I, \begin{cases} |x-a| < A & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ x < A & \text{si } a = -\infty \\ x > A & \text{sinon} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |f(x)-f(l)| < L & \text{si } l \in \mathbb{R} \\ f(x) < L & \text{si } l = -\infty \\ f(x) > L & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2. Vérifier sur des **exemples simples** qu'on peut utiliser ces définitions pour montrer qu'une fonction a bien pour limite le résultat attendu (par exemple $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ en 0, ou en $+\infty$, ou encore exp en $-\infty$ ou en $+\infty$, etc).

Remarque 2

Cette définition est la définition **francophone** de la limite. En particulier, si f est définie en a (*i. e.* $a \in I$ et pas seulement $a \in \overline{I}$) et que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, alors nécessairement $\ell = f(a)$ (la réciproque étant fausse).

Par exemple l'application $\chi_{\{0\}} = x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$ n'a pas de limite en 0. On verra plus bas la version anglophone.

Dessin :

Théorème 1 : Unicité de la limite.

Si f a une limite en a alors cette limite est unique, on la note alors $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(a)$.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux limites ℓ_1 et ℓ_2, finies ou infinies. D'après la propriété de séparation il existe deux voisinages V_{ℓ_1} de ℓ_1 et V_{ℓ_2} de ℓ_2 disjoints. Par définition de la limite il existe donc deux voisinages de a, V_a et V_a', tels que $\forall x \in I \cap V_a,\ f(x) \in V_{\ell_1}$ et $\forall x \in I \cap V_a',\ f(x) \in V_{\ell_2}$. On obtient donc $\forall x \in I \cap V_a \cap V_a',\ f(x) \in V_{\ell_1} \cap V_{\ell_2} = \emptyset$. Or $V_a \cap V_a'$ est un voisinage de a donc $I \cap V_a \cap V_a'$ est non vide. Contradiction. $\square$

Notation 2 Sous réserve d'existence, on notera donc $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ l'unique limite de f en a.

Définition 6 : Limites à gauche, à droite.

1. On dit que <u>f a pour limite à gauche ℓ en a</u> et on note $f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell$ lorsqu'on a $f_{|I\cap]-\infty,a[} \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.
2. On dit que <u>f a pour limite à droite ℓ en a</u> et on note $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$ lorsqu'on a $f_{|I\cap]a,+\infty[} \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 3. L'écrire en formalisme symbolique.

Corrigé :
1. $f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ a-\eta < x < a \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$
2. $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ a < x < a+\eta \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$

Notation 3 L'unicité de la limite implique l'unicité des limites à gauche et à droite. Sous réserve d'existence, on notera donc $\ell = \lim\limits_{a^-} f$ ou $\ell = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ pour $f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell$; et $\ell = \lim\limits_{a^+} f$ ou $\ell = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ pour $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell$.

Exemples 4

1. $\lim\limits_{x\to 0^-} E(x) = \ldots\ldots$ alors que $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = \ldots\ldots.$
2. Pour $f = \chi_{\{0\}} = x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ldots\ldots.$

Proposition 3 : Lien avec les limites.

On a deux cas :

1. Si $a \notin I$, alors : $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \iff f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell$ et $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell$.
2. Si $a \in I$, alors : $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \iff f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell$ et $f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell$ et $f(a) = \ell$.

Exercice 4. Le démontrer.

Remarque 3

Si le second point vous perturbe (sait-on jamais) et que vous auriez voulu que $\chi_{\{0\}} = x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ ait une limite en 0, c'est que vous avez en tête la **version anglo-saxonne** de la définition de la limite. Avec le vocabulaire francophone, on parle de **limite épointée** : <u>f a pour limite épointée ℓ en a</u> lorsque $f_{|I\setminus\{a\}} \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.
Évidemment, dans le cas où $a \notin I$, limite et limite épointée coïncident.

II.2 Critères d'existence de limite

Dans ce paragraphe, on reprend les critères de convergence/divergence vus pour les suites et on les adapte aux fonctions. Il y a des modifications techniques à apporter, mais globalement les théorèmes se maintiennent puisque les définitions sont analogues.

Théorème 2 .

Si f a une limite finie en a, alors f est bornée **au voisinage de a**.

Exercice 5. Le démontrer.

/!\ Contrairement à ce qui se passait pour des suites, le fait que f soit bornée au voisinage de a (même pour $a = +\infty$) ne garantit en aucun cas que f soit bornée tout court. Par exemple $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour limite 0 en $+\infty$ donc est bornée au voisinage de $+\infty$, mais n'est pas bornée tout court.

Théorème 3 : TLM, version fonctions.

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ **croissante** et $a \in \overline{I}$. Alors :

i. Si f est définie à gauche en a, $\lim\limits_{a^-} f$ existe.
ii. Si f est définie à droite en a, $\lim\limits_{a^+} f$ existe.
iii. Toutes les inégalités suivantes sont vraies lorsqu'elles ont un sens : $\lim\limits_{a^-} f \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{a^+} f$.

Énoncé analogue pour f décroissante.

Remarque 4
Pour le troisième point, si par exemple la fonction est définie au voisinage de a sauf en a, on a seulement $\lim\limits_{a^-} f \leqslant \lim\limits_{a^+} f$. Si la fonction est définie à droite de a et en a, mais pas à gauche de a, on a seulement $f(a) \leqslant \lim\limits_{a^+} f$. Etc.

Exemple 5 Un dessin :

DÉMONSTRATION.

Pour la démonstration, on supposera que f est définie à gauche de a et on se limitera aux deux cas suivants : « $a \in I$ » et « f non bornée au voisinage de a », et on montrera uniquement l'énoncé essentiel dans chaque cas. À charge du lecteur de compléter par lui-même, **s'il le souhaite**.

$\boxed{\text{Si } a \in I}$ On montre seulement que $\lim\limits_{a^-} f$ existe et qu'on a $\lim\limits_{a^-} f \leqslant f(a)$.
On considère la partie $\mathcal{A}$ suivante : $\mathcal{A} = f(]-\infty, a[\cap I) = \{f(x),\ x \in I \text{ et } x < a\}$. $\mathcal{A}$ est non vide (on a supposé f définie à gauche en a) et majorée (par $f(a)$, par croissance de f). Elle a donc une borne supérieure α. De plus, $f(a)$ étant un majorant de $\mathcal{A}$, on a $\alpha \leqslant f(a)$. Montrons qu'on a $\lim\limits_{a^-} f = \alpha$. Comme α est la borne supérieure de $\mathcal{A}$, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, y < \alpha < y + \varepsilon$ c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0, \exists z \in I, z < a$ et $f(z) < \alpha < f(z) + \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$ et z associé. Posons $\eta = a - z$. Soit $x \in]a - \eta, a[\cap I =]z, a[\cap I$. On a $\alpha \geqslant f(x) \geqslant f(z)$ par croissance donc $0 \leqslant \alpha - f(x) \leqslant \alpha - f(z) \leqslant \varepsilon$. Ainsi a-t-on $|f(x) - \alpha| \leqslant \varepsilon|$ ce qu'il fallait montrer.

$\boxed{\text{Si } f \text{ est non bornée au voisinage de } I}$ On montre seulement $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$.
On considère là encore $\mathcal{A} = f(]-\infty, a[\cap I)$ qui est non vide (on a supposé f définie à gauche en a) mais cette fois non majorée (car f est non bornée au voisinage de I). Montrons qu'on a $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$. Comme $\mathcal{A}$ est non majorée, on a $\forall A > 0, \exists y \in A, y > A$ c'est-à-dire $\forall A > 0, \exists z \in I, z < a$ et $f(z) > A$.
On a donc bien $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$ par définition ! $\square$

Théorème 4 : TDG, version fonctions.
Soient f, g, h trois fonctions comme la fonction f du préambule.

a. Convergence par encadrement : supposons $\begin{cases} f \leqslant g \leqslant h \text{ au voisinage de } a \\ \exists \ell \in \mathbb{R},\ f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \text{ et } h \underset{a}{\longrightarrow} \ell. \end{cases}$ Alors $g \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

b. Divergence par minoration : supposons $\begin{cases} f \leqslant g \text{ au voisinage de } a \\ f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty. \end{cases}$ Alors $g \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$.

Divergence par majoration : supposons $\begin{cases} g \leqslant h \text{ au voisinage de } a \\ h \underset{a}{\longrightarrow} -\infty. \end{cases}$ Alors $g \underset{a}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 6. Le démontrer.

II.3 Opérations sur les limites

Théorème 5 : Opérations algébriques sur les limites.

Soient f, g comme dans le préambule ; $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$; et $\square \in \{+, -, \times, \div\}$.

Supposons qu'on ait $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$, qu'on ait $g \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$, et que $\ell_1 \square \ell_2$ ait un sens.

Alors $f \square g \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1 \square \ell_2$.

Exercice 7. Ne surtout pas le démontrer. Mais on peut traiter quelques cas.

Théorème 6 : Compositions de limites.

Soient I et J deux réunions d'intervalles non triviaux, $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $\left\{ \begin{array}{l} f : I \to J \\ g : J \to \mathbb{R} \end{array} \right.$, telles que $\left\{ \begin{array}{l} \lim_a f = b \\ \lim_b g = c. \end{array} \right.$

Alors $\lim_a g \circ f = c$.

Exercice 8. Le démontrer.

Remarque 5

On voit là la grande force de la version francophone de la limite. Pour obtenir une version de ce théorème qui reste vraie avec la version anglophone, il faut se contorsionner.

II.4 Caractérisation séquentielle de la limite et applications

Théorème 7 : Caractérisation séquentielle de la limite.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$;

ii. $\forall (u_n)_{\in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}},\ u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to \ell$.

Démonstration. • Pour $a \in I$, c'est la caractérisation séquentielle de la continuité ! Plus généralement, pour a et ℓ finis, il suffit de recopier la caractérisation séquentielle de la continuité (en remplaçant $f(a)$ par ℓ si $a \notin I$).

• Restent 8 cas. À titre d'exercice, vous pouvez traiter l'un de ces huits cas pour voir ce qui change. Plus costaud, vous pouvez traiter directement la version unifiée à l'aide des voisinages, en identifiant quelles propriétés des voisinages interviennent. $\square$

Remarque 6

En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, on peut redémontrer les théorèmes précédents (opérations algébriques, composition, TdG, et même TLM) plus facilement qu'à l'aide de la définition !

Exercice 9. En faire un ou deux.

En application, on peut adapter aux fonctions les théorèmes vus sur les suites. Par exemple, ce théorème essentiel :

Théorème 8 : Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

Si $f \leqslant g$ au voisinage de a et qu'on a $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$ alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

On peut, bien sûr, énoncer une version plus générale avec des fermés.