Programme de khôlle

de la semaine du 14/09/2020

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Rédaction de raisonnements mathématiques (ou : *L'algorithme de démonstration des trucs.*)

1. Énoncés et expressions mathématiques. Formalisme symbolique (appartenance, inclusion, connecteurs logiques, quantificateurs, ...). Statut des variables (libres, liées) dans les énoncés et les expressions.
2. Principes de rédaction de base : démonstration d'une quantification universelle, d'une implication, d'une équivalence (par équivalences successives ou par double implication), d'une inclusion, d'une égalité entre ensembles, d'une égalité entre applications, d'une quantification existentielle, d'une quantification existentielle unique (existence puis unicité ou équivalences successives).
3. Techniques de démonstration classiques : raisonnement par analyse/synthèse, par contraposition, par disjonction des cas, par l'absurde, par récurrence (simple).

Le cours sur la logique sera traité plus tard et celui sur les ensembles sera traité encore plus tard : merci de ne pas donner d'exercices avec des intersections et des complémentaires partout, cela n'a pas encore été vu.

Techniques algorithmiques de calcul

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Dérivation

1. Nombre dérivé en un point. Fonction dérivée.
2. Fonctions dérivée des fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \ln(x)$.
   Les autres fonctions usuelles n'ont pas encore étés vues.
3. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une application de la forme $x \mapsto f(g(x))$.
4. Théorème sur le signe de la dérivée ; étude pratique d'une fonction réelle. Interprétation du signe de la dérivée seconde.

Remarques :

- Il est demandé aux examinateurs et aux examinatrices de réclamer la restitution d'une dérivée usuelle (cliquer pour voir le formulaire) en début de khôlle.
- Il est demandé aux examinateurs et aux examinatrices de donner pour premier exercice une question de cours (voir en ligne la liste). Celle-ci doit être résolue **rapidement**, sans quoi le kholleur est en droit de passer brutalement à un second exercice.
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne connaissant pas ses dérivées usuelles ou ne sachant pas son cours.

Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 14/09/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours

Mathématiques

Rédaction

1A Que signifie « $A \subset B$ » ?

1B Que désigne « $\{x \in E,\ P(x)\}$ » ? Et « $\{f(x),\ x \in E\}$ » ?

1C Comment peut-on démontrer un énoncé de la forme $\exists! x \in E,\ P(x)$.

1D Comment montre-t-on une égalité entre ensembles ? Une égalité entre fonctions ?

1E Énoncer sans démonstration le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{N}$. À quoi peut-il servir ?

1F Énoncer sans démonstration le théorème de contraposition. À quoi sert-il ?

1G En quoi consiste un raisonnement par analyse-synthèse ?

1H Soit $n \in N$. Montrer $n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$.

1I Montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

1J Énoncer sans démonstration le théorème de récurrence (simple).

Techniques algorithmiques de calcul

Dérivation

1α Énoncer sans démonstration le théorème de dérivation d'une combinaison linéaire, d'un produit ou d'un quotient (sur un intervalle). Attention, ne pas oublier les hypothèses !

1β Énoncer sans démonstration le théorème de dérivation des fonctions composées (sur un intervalle).
Attention, ne pas oublier les hypothèses !

1γ Énoncer sans démonstration le théorème sur le signe de la dérivée.
Attention, ne pas oublier les hypothèses ! ! !

Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 14/09/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours

Mathématiques

Rédaction

1A Que signifie « $A \subset B$ » ?

1B Que désigne « $\{x \in E,\ P(x)\}$ » ? Et « $\{f(x),\ x \in E\}$ » ?

1C Comment peut-on démontrer un énoncé de la forme $\exists! x \in E,\ P(x)$.

1D Comment montre-t-on une égalité entre ensembles ? Une égalité entre fonctions ?

1E Énoncer sans démonstration le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{N}$. À quoi peut-il servir ?

1F Énoncer sans démonstration le théorème de contraposition. À quoi sert-il ?

1G En quoi consiste un raisonnement par analyse-synthèse ?

1H Soit $n \in N$. Montrer $n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$.

1I Montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

1J Énoncer sans démonstration le théorème de récurrence (simple).

Techniques algorithmiques de calcul

Dérivation

1α Énoncer sans démonstration le théorème de dérivation d'une combinaison linéaire, d'un produit ou d'un quotient (sur un intervalle). Attention, ne pas oublier les hypothèses !

1β Énoncer sans démonstration le théorème de dérivation des fonctions composées (sur un intervalle).
Attention, ne pas oublier les hypothèses !

1γ Énoncer sans démonstration le théorème sur le signe de la dérivée.
Attention, ne pas oublier les hypothèses ! ! !

Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 24/09/2020

(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Rédaction de raisonnements mathématiques :
Reprise du programme précédent.

Trigonométrie

1. Angles orientés de deux vecteurs. Mesures d'un angle orienté. Relation de congruence modulo t et ses propriétés immédiates (algébriques, de relation d'équivalence).
2. Cosinus, sinus, tangente et cotangente d'un angle. Applications des théorèmes de Pythagore et de Thalès.
3. Fonctions trigonométriques (cosinus, sinus, tangente et cotangente d'un réel). Valeurs remarquables. Formules trigonométriques. Équations trigonométriques. **Pas d'analyse (dérivée, graphe, ...) sur les fonctions trigonométriques, mais leur continuité est admise.** Limite en 0 de $\frac{\sin}{\mathrm{id}}$ (preuve géométrique).
4. Fonctions trigonométriques réciproques. **Pas d'analyse (dérivée, graphe, ...) sur les fonctions trigonométriques réciproques.** Équations trigonométriques.

Pour les fonctions trigonométriques réciproques, l'existence et l'unicité est très provisoirement admise.

TECHNIQUES ALGORITHMIQUES DE CALCUL

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Dérivation :
Reprise du programme précédent.

Équations différentielles linéaires à coefficients constants :

1. Premier ordre. Résolution de l'équation homogène. Détermination d'une solution particulière dans des cas simples. Détermination de l'unique solution vérifiant une condition initiale.
2. Second ordre. Résolution de l'équation homogène. Détermination d'une solution particulière dans des cas simples. Détermination de l'unique solution vérifiant un problème de Cauchy.

Attention ! Les équations différentielles linéaires à coefficients non constants sont HORS PROGRAMME cette semaine, même au premier ordre. Par ailleurs, les élèves ne peuvent trouver de solution particulière que dans le cas d'un second membre très simple et pas dans le cas où le second membre appartient à l'espace des solutions homogènes.

Remarques :

- Il est demandé aux examinatrices et aux examinateurs de réclamer la restitution d'une formule trigonométrique en début de khôlle (voir en ligne) Celle-ci doit être donnée par l'élève en une ou deux minutes grand maximum. Les examinateurs et les examinatrices peuvent piocher dans toute la liste.
- Il est demandé aux examinatrices et aux examinateurs de donner pour premier exercice une question de cours (voir en ligne la liste). Celle-ci doit être résolue **rapidement**, sans quoi l'examinateur ou l'examinatrice est en droit de passer brutalement à un second exercice.
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne connaissant pas ses formules trigonométriques ou ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 24/09/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours

Mathématiques

Rédaction

Reprise des questions de cours de la semaine dernière.

Trigonométrie

2A Définir le cosinus, le sinus, la tangente et la cotangente d'un angle.

2B Montrer les relations $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ et (si θ n'est pas droit) $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

2C Quelles sont les relations algébriques des congruences. L'examinatrice ou l'examinateur pourrait demander d'en démontrer une.

2D Montrer que la relation de congruence modulo 2π est réflexive, symétrique, transitive. L'examinateur ou l'examinatrice pourra tout demander, ou seulement une partie.

2E Définir le cosinus, le sinus, la tangente et la cotangente d'un réel. Donner leurs propriétés (domaine de définition, parité, périodicité, signe... l'examinatrice ou l'examinateur pourra en cibler une en particulier ou toutes les demander).

2F Donner sans démonstration la définition des fonctions arccos, arcsin, arctan.

Techniques algorithmiques de calcul

Équations différentielles

2α Énoncer sans démonstration le théorème sur les solutions homogènes au premier ordre et les trois théorèmes sur les solutions homogènes au second ordre (l'examinateur ou l'examinatrice pourra ne pas tout demander).

2β Énoncer sans démonstration le théorème décrivant l'ensemble des solutions d'une équation différentielle avec second membre, au premier ordre et au second ordre (l'examinatrice ou l'examinateur pourra n'en demander qu'un seul).

2γ Expliquer comment on résout une équation différentielle (avec conditions initiales éventuelles).

Programme de khôlle

de la semaine du 28/09/2019

(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Trigonométrie

Reprise du programme précédent.

Fonctions réciproques de fonctions usuelles

1. Théorème de la bijection sur un fermé et sur un ouvert (sans démonstration). Application aux définitions d'arccos, arcsin, arctan.
2. Dérivées de cos, sin, tan (avec démonstration).
3. Théorème de dérivation des fonctions réciproques (sans démonstration). Application au calcul du domaine de dérivabilité de arccos, arcsin, arctan, et au calcul de leurs dérivées.

Attention : rien sur la notion de bijectivité en général, on se limite aux fonctions réelles ici.

Sommes et identités remarquables (le début)

1. Généralités sur les sommes :
   a. Sommes de la forme $\sum_{k=a}^{b} u_k$. Propriétés : linéarité, relation de Chasles, identité de comptage (somme de 1).
   b. Changement d'indice sommatoire (le théorème de changement de variable a été vu mais **seule la pratique du changement d'indice dans des cas simples est exigible**).
   c. Sommes télescopiques.
2. Identités arithmétiques et géométriques :
   a. Expression de la somme $\sum_{k=1}^{n} k$ et application à la somme des termes d'une suite arithmétique.
   b. Identité géométrique $(q^n - 1)$ et application à la somme des termes d'une suite géométrique $(\sum_{k=0}^{n} q^k u_0)$.
   c. Identité géométrique généralisée $(a^n - b^n)$.

Pas de sommes doubles.
Cette semaine : pas de coefficients binomiaux.

TECHNIQUES ALGORITHMIQUES DE CALCUL

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

$\mathbb{R}^3$ (géométrie dans l'espace)

1. Base de $\mathbb{R}^3$. Base orthonormée. Coordonnées dans une base.
2. Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte.

Rien sur la structure affine, rien sur les équations dans l'espace.

Note aux examinateurs et aux examinatrices : Comme d'habitude, les élèves ont eu un cours axé sur les calculs (utiles en SI), sans théorie ni démonstration ! Ils doivent savoir :

i/ Décomposer un vecteur dans une base quelconque.
ii/ Calculer la mesure d'un angle non orienté de deux vecteurs.
iii/ **Important :** déterminer si une base est orthonormée, et son orientation.
iv/ **Important :** décomposer un vecteur dans une base orthonormée.
v/ **Important :** utiliser les formules analytiques pour calculer un produit scalaire, un produit vectoriel, un produit mixte.
vi/ Utiliser les autres formules donnant le produit scalaire, le produit vectoriel, le produit mixte.

Remarques :

- Il est demandé aux examinatrices et aux examinateurs de réclamer la restitution d'une formule trigonométrique en début de khôlle (voir en ligne) Celle-ci doit être donnée par l'élève en une ou deux minutes grand maximum. Les examinateurs et les examinatrices peuvent piocher dans toute la liste.
- Il est demandé aux kholleurs de donner pour premier exercice une question de cours (voir en ligne la liste).
  Celle-ci doit être résolue **rapidement**, sans quoi le kholleur est en droit de passer brutalement à un second exercice.
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas ses formules trigonométriques ou ne sachant pas son cours.

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 28/09/2019

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours

Mathématiques

Trigonométrie

Reprise des questions de cours de la semaine dernière.

Fonctions réciproques de fonctions usuelles

3A Énoncer sans démonstration le théorème de la bijection sur un fermé ou sur un ouvert (au choix de l'examinatrice ou l'examinateur).

3B Démontrer la proposition permettant de définir arccos.

3C Donner avec démontration la dérivée de cos, sin ou tan (au choix de l'examinateur ou l'examinatrice).

3D Énoncer sans démonstration le théorème de dérivation des fonctions réciproques.

3E Donner avec démonstration le domaine de dérivabilité de arccos et détailler le calcul de sa dérivée.

Sommes et identités remarquables (le début)

4A Expliquer ce que signifient : la linéarité de la somme, la relation de Chasles, l'identité de comptage. Le kholleur ne pourra en demander qu'une ou deux.

4B Qu'est-ce qu'une somme télescopique ? Le kholleur pourra, ou pas, demander un exemple concret.

4C Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.
Le kholleur pourra, ou pas, en demander une démonstration.

4D Pour $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$, donner l'expression de $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.
Le kholleur pourra, ou pas, en demander une démonstration.

Techniques algorithmiques de calcul

Géométrie dans $\mathbb{R}^3$

3α Expliquer comment on trouve la décomposition d'un vecteur dans une base.
Expliquer comment on peut aller plus vite lorsque la base est orthonormée.

3β Donner la formule analytique du produit scalaire, valable dans la base canonique.
Dans quels autres types de bases reste-t-elle valable ?

3γ Donner la formule du produit scalaire qui fait intervenir le cosinus.

3δ Donner la formule analytique du produit vectoriel, valable dans la base canonique.
Dans quels autres types de bases reste-t-elle valable ?

3ϵ Donner la formule analytique du produit mixte, valable dans la base canonique.
Dans quels autres types de bases reste-t-elle valable ?

Programme de khôlle

de la semaine du 05/10/2020

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Sommes et identités remarquables

1. Généralités sur les sommes :
   a. Sommes de la forme $\sum\limits_{k=a}^{b} u_k$. Propriétés : linéarité, relation de Chasles, identité de comptage (somme de 1).
   b. Changement d'indice sommatoire (le théorème de changement de variable a été vu mais **seule la pratique du changement d'indice dans des cas simples est exigible**).
   c. Sommes télescopiques.
2. Identités arithmétiques et géométriques :
   a. Expression de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ et application à la somme des termes d'une suite arithmétique.
   b. Identité géométrique $(q^n - 1)$ et application à la somme des termes d'une suite géométrique $(\sum\limits_{k=0}^{n} q^k u_0)$.
   c. Identité géométrique généralisée $(a^n - b^n)$.
   d. Expression du $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite arithmético-géométrique en fonction de n.
3. Coefficients binomiaux et binôme de Newton.
   a. Coefficients binomiaux. Définition. Propriétés immédiates (formule de symétrie, formule de Pascal). Formule à l'aide des factorielles. Formule du pion $\left(k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}\right)$.
   b. Binôme de Newton. Formule de Leibniz et exercice CCP $n°$ 3.
   c. Application au calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.
4. Sommes doubles : calcul de $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(i,j)$, de $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(i)g(j)$, de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} f(i,j)$.
   Les sommes doubles plus générales ne seront vues que plus tard.

Techniques algorithmiques de calcul

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Intégration (calculs de primitives et d'intégrales.

1. Définition de l'intégrale comme aire algébrique orientée. Propriétés : linéarité, croissance, Chasles, inégalité triangulaire.
2. Primitives usuelles.
3. Théorème fondamental de l'analyse. Version renversée : si f continue a pour primitive F alors $\displaystyle\int_a^b f = \big[F\big]_a^b$.
   Version directe : si f est continue sur $[a,b]$ et $\alpha \in [a,b]$ alors $x \mapsto \displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en α.
   Intégrale fonction de ses bornes.
4. Intégration et primitivation par parties.
5. Intégration et primitivation par identification de motif.

Cette semaine : pas de changement de variables !

Remarques :

- Il est demandé aux examinateurs et aux examinatrices de réclamer une primitive usuelle en début de khôlle (voir en ligne).
- Il est demandé aux kholleurs de donner pour premier exercice une question de cours (voir en ligne la liste).
  Celle-ci doit être résolue **rapidement**, sans quoi le kholleur est en droit de passer brutalement à un second exercice.
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas ses primitives usuelles ou ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 05/10/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours

Mathématiques

Sommes et identités remarquables

3A Expliquer ce que signifient : la linéarité de la somme, la relation de Chasles, l'identité de comptage. Le kholleur ne pourra en demander qu'une ou deux.

3B Qu'est-ce qu'une somme télescopique ? Le kholleur pourra, ou pas, demander un exemple concret.

3C Énoncer le résultat sur la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1.
Le kholleur pourra, ou pas, en demander une démonstration.

3D Donner l'expression en fonction de n du $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite arithmético-géométrique choisie par l'examinatrice ou l'examinateur. On pourra disposer pour le retrouver d'une à trois minutes.

3E Définir $\binom{n}{k}$ et donner sans démonstration une formule pour le calculer.

3F Énoncer la formule de symétrie et la formule de Pascal. Le kholleur pourra, ou pas, en demander une démonstration.

3G Énoncer la formule du binôme de Newton. L'examinateur ou l'examinatrice pourra, ou pas, en demander une démonstration.

3H Énoncer le résultat sur la somme des k^i, où $i \in \{0, 1, 2\}$ sera choisi par le kholleur.

3I Énoncer la formule de Leibniz. L'examinatrice ou l'examinateur sadique pourra en demander une démonstration.

3J Réécrire la somme double $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} f(i,j)$ en changeant l'ordre de la sommation.

Techniques algorithmiques de calcul

Intégration

4α Expliquer ce que signifient : la linéarité de l'intégrale, la relation de Chasles, la croissance de l'intégrale. Le kholleur ne pourra en demander qu'une ou deux.

4β Donner sans démonstration le théorème fondamental de l'analyse (version renversée).

4γ Donner la dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ avec f continue et u, v dérivables.

4δ Donner sans démonstration le théorème d'intégration par parties. Donner sans démonstration les théorème de primitivation par parties. L'examinateur ou l'examinatrice pourra n'en demander qu'un, ou les deux. On n'oubliera pas les hypothèses.

Programme de khôlle

de la semaine du 12/10/2020

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Logique

1. Logique propositionnelle : tables de vérités, égalités sémantiques remarquables (involutivité de la négation, lois de De Morgan logiques, propriétés algébriques des connecteurs $\vee$ et $\wedge$, ...).
2. Émulation d'une quantification existentielle unique.
3. Négation d'un énoncé mathématique.

Le cours sur les ensembles sera traité plus tard : merci de ne pas donner d'exercices avec des intersections et des complémentaires partout, cela n'a pas encore été vu.

Applications de la relation fonctionnelle de $\theta \mapsto \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

1. Relation fonctionnelle de l'application $\theta \mapsto \cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)$. Notation $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Formules d'Euler et de De Moivre. Application à la linéarisation de polynômes trigonométriques. Simplification de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ à l'aide de l'arc moitié.
2. Module d'un nombre complexe. Arguments et argument principal d'un nombre complexe non nul. Écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul. **Les propriétés des modules sont hors-programme cette semaine, les seules propriétés des arguments exigibles cette semaine sont celles qui se déduisent de la relation fonctionnelle.**
3. Ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité : description en compréhension et description explicite. Somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité pour $n \geqslant 2$. Résolution de l'équation $z^n = c$ où $c \in \mathbb{C}$.
4. Exponentielle complexe $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy}$. Non injectivité.
5. Fonctions à valeurs complexes. Caractérisation de la dérivabilité et de la dérivée à l'aide des applications partie réelle et partie imaginaire. Dérivée d'une application de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$ avec φ une fonction à valeurs complexes et application à des calculs d'intégrale ou de dérivées $n^{\text{ièmes}}$.
6. Exercices CCINP n° 31-1 (*i. e.* seulement la question 1 de l'exercice 31), n° 84, n° 89.

Attention : **ce n'est pas un cours complet sur les nombres complexes. Les notions non explicitement au programme cette semaine seront vues dans des chapitres ultérieurs, les élèves ne doivent pas être interrogés dessus. En particulier, la conjugaison n'a pas été évoquée dans ce chapitre.**

Techniques algorithmiques de calcul

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Intégration (calculs de primitives et d'intégrales.

1. Définition de l'intégrale comme aire algébrique orientée. Propriétés : linéarité, croissance, Chasles, inégalité triangulaire.
2. Primitives usuelles.
3. Théorème fondamental de l'analyse. Version renversée : si f continue a pour primitive F alors $\displaystyle\int_a^b f = \big[F\big]_a^b$.
   Version directe : si f est continue sur $[a,b]$ et $\alpha \in [a,b]$ alors $x \mapsto \displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en α.
   Intégrale fonction de ses bornes.
4. Intégration et primitivation par parties.
5. Intégration et primitivation par identification de motif.
6. Intégration par changement de variables.
7. Intégrales de Wallis.
8. Intégration des fonctions à valeurs complexes : primitives de $t \mapsto \varphi'(t)\mathrm{e}^{\varphi(t)}$ pour $\varphi \in \mathcal{C}([a,b], \underline{\underline{\mathbb{C}}})$.
9. Théorème de convergence des sommes de Riemann.

Lorsqu'un exercice demande un calcul d'intégrale nécessitant un changement de variable, il est attendu que l'examinatrice ou l'examinateur le donne à l'élève, sauf cas très simple.

Remarques :

- Il est demandé aux examinateurs et aux examinatrices de réclamer une primitive usuelle en début de khôlle (voir en ligne).
- Il est demandé aux kholleurs de donner pour premier exercice une question de cours (voir en ligne la liste).
  Celle-ci doit être résolue **rapidement**, sans quoi le kholleur est en droit de passer brutalement à un second exercice.
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas ses primitives usuelles ou ne sachant pas son cours.

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 12/10/2020

(Maths - MPSI)

LISTE DE QUESTIONS DE COURS

MATHÉMATIQUES

Logique

4A Énoncer les lois de de Morgan et l'involutivité de la négation.

4B Donner quatre propriétés vérifiées par les connecteurs $\vee$ et $\wedge$.

4D Qu'illustre la phrase « Vous n'avancez pas ou je tire » ?

4C Reformuler la proposition $\exists! a \in A,\ P(a)$ sans le symbole $\exists!$.

Applications de la relation fonctionnelle de $\theta \mapsto \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

5A Démontrer la relation fonctionnelle de l'application $\theta \mapsto \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

5B Donner avec démonstration les formules d'Euler et de De Moivre.
Un examinateur ou un examinateur pourrait n'en demander qu'une, ou ne pas demander de démonstration.

5C Définir ce qu'est le module d'un nombre complexe et ce qu'est un argument d'un nombre complexe non nul.

5D Justifier que tout nombre complexe non nul a un argument.

5E Pour $n \geqslant 1$, définir l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et en donner une description explicite.
Le khôlleur pourra, ou pas, en demander une démonstration.

5F Pour $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

TECHNIQUES ALGORITHMIQUES DE CALCUL

Intégration

4α Expliquer ce que signifient : la linéarité de l'intégrale, la relation de Chasles, la croissance de l'intégrale. Le khôlleur ne pourra en demander qu'une ou deux.

4β Donner sans démonstration le théorème fondamental de l'analyse (version renversée).

4γ Donner la dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$ avec f continue et u, v dérivables.

4δ Donner sans démonstration le théorème d'intégration par parties. Donner sans démonstration les théorème de primitivation par parties. L'examinateur ou l'examinatrice pourra n'en demander qu'un, ou les deux. On n'oubliera pas les hypothèses.

4δ Donner sans démonstration les théorème d'intégration par changement de variable, d'intégration par changement de variable bijectif et de primitivation par changement de variable. Le khôlleur pourra n'en demander qu'un, ou deux, ou les trois.

4ε Énoncer sans démonstration le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Programme de khôlle

de la semaine du 02/11/2020

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Logique

Reprise du programme précédent.

Applications de la relation fonctionnelle de $\theta \mapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Reprise du programme précédent.
En particulier, les exercices CCP n° 31-1 (*i. e.* seulement la question 1 de l'exercice 31), n° 84 et n° 89 restent au programme.

Ensembles.

1. Méthodes de définition : définition en extension, en compréhension, par un paramétrage. Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments. Singletons. Paires.
2. Couples. n-uplets. Produits cartésiens d'ensembles. Théorème de Le Bihan (cardinal de $A \times B$ lorsque A et B sont finis).
3. Application de A dans B (point de vue informel !). Ensemble $\mathcal{F}(A, B) = B^A$ des applications de A dans B. Théorème de Bourse (cardinal de B^A lorsque A et B sont finis).
4. Ensemble des parties d'un ensemble E. Théorème d'El Baki (cardinal de $\mathcal{P}(E)$ lorsque E est fini).

La définition en compréhension peut être vue comme un dictionnaire entre énoncés et parties de E.

4. Opérations sur $\mathcal{P}(E)$ ($\cup$, $\cap$, $X \mapsto {}^cX$, Δ, $\setminus$). Traductions ensemblistes des propriétés sur les énoncés (lois de De Morgan ensemblistes, involutivité de la complémentation, etc). Réunion disjointe ($\amalg$). Cardinal d'une réunion de deux ensembles finis.
5. Opérations sur des familles de parties $\mathcal{P}(E)$ ($\bigcup$, $\bigcap$). Partitions d'un ensemble.

Important :

- Les applications "image directe" ou "image réciproque" et les fonctions indicatrices d'un ensemble ne sont pas au programme cette se
- Les définitions et les raisonnements sur les cardinaux sont informels à ce stade. Le chapitre "dénombrements" sera traité ultérieurement.

Techniques algorithmiques de calcul

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Intégration (calculs de primitives et d'intégrales).

Reprise du programme précédent.

Rappel : lorsqu'un exercice demande un calcul d'intégrale nécessitant un changement de variable, il est attendu que l'examinatrice ou l'examinateur le donne à l'élève, sauf cas très simple.

Remarques :

- Plus de formule en début de séance !
- Il est demandé aux kholleurs de donner pour premier exercice une question de cours (voir en ligne la liste).
  Celle-ci doit être résolue **rapidement**, sans quoi le kholleur est en droit de passer brutalement à un second exercice.
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 02/11/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours

Mathématiques

Logique

4A Énoncer les lois de de Morgan et l'involutivité de la négation.

4B Donner quatre propriétés vérifiées par les connecteurs $\vee$ et $\wedge$.

4D Qu'illustre la phrase « Vous n'avancez pas ou je tire » ?

4C Reformuler la proposition $\exists! a \in A,\ P(a)$ sans le symbole $\exists!$.

Applications de la relation fonctionnelle de $\theta \mapsto \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

5A Démontrer la relation fonctionnelle de l'application $\theta \mapsto \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

5B Donner avec démonstration les formules d'Euler et de De Moivre.
Un examinateur ou un examinateur pourrait n'en demander qu'une, ou ne pas demander de démonstration.

5C Définir ce qu'est le module d'un nombre complexe et ce qu'est un argument d'un nombre complexe non nul.

5D Justifier que tout nombre complexe non nul a un argument.

5E Pour $n \geqslant 1$, définir l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et en donner une description explicite.
Le kholleur pourra, ou pas, en demander une démonstration.

5F Pour $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

Ensembles.

6A Qu'est-ce qu'une définition d'un ensemble en extension ? En compréhension ? Par un paramétrage ?

6B Énoncer et démontrer le théorème de Le Bihan (qui porte sur le cardinal de $A \times B$ lorsque A et B sont finis).

6Bbis Énoncer et démontrer le théorème de Bourse (qui porte sur le cardinal de B^A lorsque A et B sont finis).

6Bter Énoncer et démontrer le théorème d'El Baki (qui porte sur le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ lorsque E est finis).

6C Définir : $\cup$, $\cap$, ${}^c\cdot$.

6D Énoncer et démontrer une des propriétés de la liste suivante, à la discrétion de l'examinatrice ou de l'examinateur : involutivité de ${}^c\cdot$, associativité de $\cup$, associativité de $\cap$, distributivité de $\cup$ sur $\cap$, distributivité de $\cap$ sur $\cup$, lois de De Morgan ensemblistes. Les propriétés connues des énoncés logiques pourront être admises, sauf bien sûr si l'examinateur ou l'examinatrice indique explicitement que son bon plaisir est de les faire redémontrer.

6E Définir : réunion disjointe, partition.

6F On suppose A et B finis. Donner $|A \cup B|$. Pas de démonstration demandée, mais dessin apprécié.

Techniques algorithmiques de calcul

Intégration

4α Expliquer ce que signifient : la linéarité de l'intégrale, la relation de Chasles, la croissance de l'intégrale. Le kholleur ne pourra en demander qu'une ou deux.

4β Donner sans démonstration le théorème fondamental de l'analyse (version renversée).

4γ Donner la dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$ avec f continue et u, v dérivables.

4δ Donner sans démonstration le théorème d'intégration par parties. Donner sans démonstration les théorème de primitivation par parties. L'examinateur ou l'examinatrice pourra n'en demander qu'un, ou les deux. On n'oubliera pas les hypothèses.

4δ Donner sans démonstration les théorème d'intégration par changement de variable, d'intégration par changement de variable bijectif et de primitivation par changement de variable. Le kholleur pourra n'en demander qu'un, ou deux, ou les trois.

4ε Énoncer sans démonstration le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Programme de khôlle
de la semaine du 09/11/2020
(Maths - MPSI)

Mathématiques

Ensembles.

Reprise du programme précédent.

Rappels : Les applications "image directe" ou "image réciproque" et les fonctions indicatrices d'un ensemble ne sont pas au programme cette semaine. Par ailleurs, les définitions et les raisonnements sur les cardinaux sont informels à ce stade. Le chapitre "dénombrements" sera traité ultérieurement.

Relations binaires.

1. Définitions : Relation entre A et B. Relation sur A.
2. Relations réflexives, transitives, symétriques, antisymétriques.
   a. Relations d'équivalence. Classes d'équivalences. Les classes d'équivalence forment une partition. Exemple des congruences.
   b. Relations d'ordre. Relation d'ordre total, d'ordre partiel. Relation d'ordre strict.
   c. Préordres.
3. Ensembles ordonnés.
   a. Définition d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant_E)$. Exemples de $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, |)$, $(\mathcal{P}(E), \subset)$.
   b. Majorants, minorants, plus grand éléments, plus petits éléments, bornes inférieures, bornes supérieures d'une partie A de E. Cas des exemples donnés.
   c. Majorants, minorants, plus grand éléments, plus petits éléments, bornes inférieures, bornes supérieures d'une d'une suite à valeurs dans E, d'une application à valeurs dans E.
   d. Monotonie, stricte monotonie, extensivité. Caractérisation de la stricte monotonie lorsque l'ordre est total à la source.

Fonctions usuelles.

1. Plan d'étude d'une fonction.
   a. Graphe d'une application de la forme $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto f(x)+b$, $x \mapsto \pm f(\pm x)$. Restriction du domaine d'étude.
   b. Prolongement par continuité.
2. Définition, domaine, image, allure du graphe, tangentes, limites, domaine de dérivabilité, dérivée, propriétés immédiates, et toutes informations pertinentes sur les fonctions suivantes :
   a. Fonctions puissances entières. Fonctions polynomiales. Fonctions rationnelles. Fonctions "racine $n-$ième".
   b. Fonction exponentielle (définie comme unique fonction dérivable égale à sa dérivée et valant 1 en 0). Fonction logarithme (définie comme unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction inverse s'anulant en 1). Les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques l'une de l'autre. Définition de a^b. Fonctions $x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, fonctions $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$.
   c. Fonctions circulaires (sin, cos, tan). Fonctions circulaires réciproques (arcsin, arccos, arctan). Fonctions hyperboliques (sh, ch, th). *Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors-programme en* CPGE.
3. Croissances comparées, inégalités classiques...

Sur les fonctions hyperboliques, les trois seules identités exigibles sont celles portant sur $\mathbf{ch} + \mathbf{sh}$, $\mathbf{ch} - \mathbf{sh}$ et $\mathbf{ch}^2 - \mathbf{sh}^2$.

Techniques algorithmiques de calcul

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Factorisation des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1. Algorithme de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Racines et lien avec la factorisation. Critère de divisibilité de P par $(X-\lambda)^m$ à l'aide de P, P', …, $P^{(m-1)}$.
3. Racines "évidentes" (pour un polynôme unitaire à coefficients entiers relatifs, test des diviseurs du coefficient constant).

Remarques :

- Il est demandé aux kholleurs de donner pour premier exercice une question de cours (voir en ligne la liste).
  Celle-ci doit être résolue **rapidement**, sans quoi le kholleur est en droit de passer brutalement à un second exercice.
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 09/11/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours

Mathématiques

Ensembles.

6A Qu'est-ce qu'une définition d'un ensemble en extension ? En compréhension ? Par un paramétrage ?

6B Énoncer et démontrer le théorème de Le Bihan (qui porte sur le cardinal de $A \times B$ lorsque A et B sont finis).

6Bbis Énoncer et démontrer le théorème de Bourse (qui porte sur le cardinal de B^A lorsque A et B sont finis).

6Bter Énoncer et démontrer le théorème d'El Baki (qui porte sur le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ lorsque E est finis).

6C Définir : $\cup$, $\cap$, ${}^c\cdot$.

6D Énoncer et démontrer une des propriétés de la liste suivante, à la discrétion de l'examinatrice ou de l'examinateur : involutivité de ${}^c\cdot$, associativité de $\cup$, associativité de $\cap$, distributivité de $\cup$ sur $\cap$, distributivité de $\cap$ sur $\cup$, lois de De Morgan ensemblistes. Les propriétés connues des énoncés logiques pourront être admises, sauf bien sûr si l'examinateur ou l'examinatrice indique explicitement que son bon plaisir est de les faire redémontrer.

6E Définir : réunion disjointe, partition.

6F On suppose A et B finis. Donner $|A \cup B|$. Pas de démonstration demandée, mais dessin apprécié.

Relations binaires.

7A Définir ce qu'est une relation d'équivalence, une relation d'ordre total et une relation d'ordre partiel. L'examinatrice ou l'examinateur pourra ne demander qu'une seule définition, ou deux, ou les trois. Elle ou il pourra demander zéro, un, ou deux exemples pour chaque concept défini.

7B Définir ce que sont les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence. Que dire de l'ensemble des classes d'équivalence ? L'examinateur ou l'examinatrice pourra, ou pas, demander des détails.

7C Montrer qu'un plus grand élément est toujours unique puis illustrer par un exemple que toute partie d'un ensemble ordonné n'a pas toujours de plus grand élément.

7D Dans l'ensemble ordonné de votre choix, donner un exemple de partie ayant un plus grand élément, un exemple de partie n'ayant pas de plus grand élément mais ayant une borne supérieure, et un exemple de partie n'ayant pas de borne supérieure.

Fonctions usuelles.

8A Donner la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$. Le kholleur pourra, ou pas, demander une démonstration.

8B Donner avec démonstration le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions ch, sh et th. L'examinatrice ou l'examinateur pourra n'en demander qu'une ou deux.

8C Donner avec démonstration les trois limites (croissances comparées) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$. L'examinateur ou l'examinatrice pourra n'en demander qu'une ou deux.

3B Démontrer la proposition permettant de définir arccos.

3C Donner avec démontration la dérivée de cos.

3E Donner avec démonstration le domaine de dérivabilité de arccos et détailler le calcul de sa dérivée.

Techniques algorithmiques de calcul

Factorisation des polynômes

5α Énoncer (sans démonstration évidemment) le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$.

5β Qu'est-ce qu'un polynôme scindé à racines simples ? Juste scindé ?

Programme de khôlle

de la semaine du 16/11/2020

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Fonctions usuelles.

Reprise du programme précédent.

Entiers naturels.

1. Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ ($\leqslant$ est un bon ordre). Applications : variante de la propriété fondamentale (toute partie non vide et majorée a un plus grand élément), théorème de division euclidienne dans $\mathbb{N}$, théorème de récurrence.
2. Variantes de la récurrence : Récurrence double. Récurrence forte.
   Remarque : une récurrence forte ne n'initialise pas.
3. Définitions par récurrence : construction d'une suite par récurrence simple, double ou forte, dépendante ou non.
   Symboles somme et produit.

Techniques algorithmiques de calcul

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Factorisation des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Reprise du chapitre précédent.

Décompositions en éléments simples

Reprise du programme précédent.

1. Cas scindé à racines simples. Cas scindé. Cas sans facteur multiple. Cas général.
2. Application à l'intégration des fractions rationnelles en t.

Important : l'objectif n'est pas que les étudiants sachent énoncer les théorèmes de décomposition en éléments simples, mais qu'ils soient capables de mener une DES dans le cas d'un dénominateur de petit degré, même non scindé ou avec des facteurs multiples, et puissent le cas échéant en déduire des calculs d'intégrales ou de sommes.

Remarques :

- Il est demandé aux kholleurs de donner pour premier exercice une question de cours (voir en ligne la liste).
  Celle-ci doit être résolue **rapidement**, sans quoi le kholleur est en droit de passer brutalement à un second exercice.
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 16/11/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours

Mathématiques

Fonctions usuelles.

8A Donner la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$. Le kholleur pourra, ou pas, demander une démonstration.

8B Donner avec démonstration le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions ch, sh et th.
L'examinatrice ou l'examinateur pourra n'en demander qu'une ou deux.

8C Donner avec démonstration les trois limites (croissances comparées) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
L'examinateur ou l'examinatrice pourra n'en demander qu'une ou deux.

3B Démontrer la proposition permettant de définir arccos.

3C Donner avec démontration la dérivée de cos.

3E Donner avec démonstration le domaine de dérivabilité de arccos et détailler le calcul de sa dérivée.

Entiers naturels.

9A Énoncer la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ (bon ordre).

9B Énoncer et démontrer le théorème de division euclidienne **dans $\mathbb{N}$**.
L'examinatrice ou l'examinateur pourra ne demander que l'énoncé, ou la démonstration seulement de l'existence ou seulement de l'unicité.

9C Que dire d'une suite décroissante d'entiers naturels ? L'examinateur ou l'examinatrice pourra, ou pas, en demander une démonstration.

9D Énoncer le théorème de récurrence. L'examinatrice ou l'examinateur pourra, ou pas, en demander une démonstration.

9E Énoncer le théorème de récurrence double. L'examinateur ou l'examinatrice pourra, ou pas, en demander une démonstration.

9F Énoncer le théorème de récurrence forte. L'examinatrice ou l'examinateur pourra, ou pas, en demander une démonstration.

9G Montrer que tout entier supérieur à 2 a un diviseur premier.

Techniques algorithmiques de calcul

Factorisation des polynômes

5α Énoncer (sans démonstration évidemment) le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$.

5β Qu'est-ce qu'un polynôme scindé à racines simples ? Juste scindé ?

Décompositions en éléments simples

6α Expliquer comment on trouve le coefficient associé à un pôle simple dans une DES.

6β Comment intègre-t-on une fraction rationnelle ? (Décrire la méthode.)

Programme de khôlle

de la semaine du 23/11/2020

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Entiers naturels.

Reprise du programme précédent.

Arithmétique.

1. Généralités :
   - Structure d'anneau ordonné de $\mathbb{Z}$. Toute partie non vide et majorée a un plus grand élément (et l'énoncé dual). Propriétés immédiates de la divisibilité (stabilité par CL, par produit, par puissances, par multiplication externe).
   - Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. Lien avec la divisibilité.
   - Relations de congruence modulo un entier dans $\mathbb{Z}$. C'est une équivalence (rappel). Propriétés algébriques des congruences. Lien avec la division euclidienne. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Nombres premiers :
   - Définition (un nombre premier est un entier naturel p qui a exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et p). Tout entier supérieur à 2 a un diviseur premier (rappel). Reformulations immédiates de la définition. Infinitude de l'ensemble des nombres premiers (rappel).
   - Existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers (preuve de Zermello pour l'unicité).
   - Valuations p-adiques.
3. PGCD et PPCM :
   - Définition, formulations équivalentes, propriétés immédiates. Calculs à l'aide des valuations p-adiques.
   - Algorithme d'Euclide. Relation de Bézout (le théorème général est appelé théorème d'Eudoxe dans le cours). Formulation moderne de la relation de Bézout (pour $d \in \mathbb{N}$, $d = a \wedge b \Leftrightarrow a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$).
   - Entiers premiers entre eux. Lien premier/premiers entre eux. Théorème de Bézout (deux entiers sont premiers entre eux ssi il existe u et v tels que...). Lemme de Gauss.

Techniques algorithmiques de calcul

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Décompositions en éléments simples

Reprise du programme précédent.

1. Cas scindé à racines simples. Cas scindé. Cas sans facteur multiple. Cas général.
2. Application à l'intégration des fractions rationnelles en t.

Rappel : l'objectif n'est pas que les étudiants sachent énoncer les théorèmes de décomposition en éléments simples, mais qu'ils soient capables de mener une DES dans le cas d'un dénominateur de petit degré, même non scindé ou avec des facteurs multiples, et puissent le cas échéant en déduire des calculs d'intégrales ou de sommes.

Remarques :

- Il est demandé aux kholleurs de donner pour premier exercice une question de cours (voir en ligne la liste).
  Celle-ci doit être résolue **rapidement**, sans quoi le kholleur est en droit de passer brutalement à un second exercice.
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 23/11/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours

Mathématiques

Entiers naturels.

9A Énoncer la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ (bon ordre).

9B Énoncer et démontrer le théorème de division euclidienne **dans $\mathbb{N}$**.
L'examinatrice ou l'examinateur pourra ne demander que l'énoncé, ou la démonstration seulement de l'existence ou seulement de l'unicité.

9C Que dire d'une suite décroissante d'entiers naturels ? L'examinateur ou l'examinatrice pourra, ou pas, en demander une démonstration.

9D Énoncer le théorème de récurrence. L'examinatrice ou l'examinateur pourra, ou pas, en demander une démonstration.

9E Énoncer le théorème de récurrence double. L'examinateur ou l'examinatrice pourra, ou pas, en demander une démonstration.

9F Énoncer le théorème de récurrence forte. L'examinatrice ou l'examinateur pourra, ou pas, en demander une démonstration.

9G Montrer que tout entier supérieur à 2 a un diviseur premier.

Arithmétique.

10A $(\mathbb{Z}, +, \times, \leqslant)$ forme un anneau commutatif ordonné. Expliquer ce que cela signifie.

10B Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence, et qu'elle est stable par somme, produit et puissance. Une examinatrice ou un examinateur pourrait ne demander qu'une partie de ces propriétés.

10C Démontrer l'existence de la décomposition en facteurs premiers.

10D Démontrer l'infinitude des nombres premiers.

10E Définir les valuations p-adiques et en donner deux propriétés.

10F Montrer la relation de Bézout (théorème d'Eudoxe) : pour $a, b \in \mathbb{Z}$, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a \wedge b = au + bv$.
Donner le cas particulier du théorème de Bézout. Une examinatrice ou un examinateur pourrait ne demander que ce cas.

10G Énoncer et démontrer le lemme de Gauss (on pourra admettre le théorème de Bézout).

Techniques algorithmiques de calcul

Décompositions en éléments simples

6α Expliquer comment on trouve le coefficient associé à un pôle simple dans une DES.

6β Comment intègre-t-on une fraction rationnelle ? (Décrire la méthode.)

Programme de khôlle

de la semaine du 30/11/2020

(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Arithmétique.

Reprise du programme précédent.

Pour rappel :

1. Généralités :
   - Structure d'anneau ordonné de $\mathbb{Z}$. Toute partie non vide et majorée a un plus grand élément (et l'énoncé dual). Propriétés immédiates de la divisibilité (stabilité par CL, par produit, par puissances, par multiplication externe).
   - Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. Lien avec la divisibilité.
   - Relations de congruence modulo un entier dans $\mathbb{Z}$. C'est une équivalence (rappel). Propriétés algébriques des congruences. Lien avec la division euclidienne. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Nombres premiers :
   - Définition (un nombre premier est un entier naturel p qui a exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et p). Tout entier supérieur à 2 a un diviseur premier (rappel). Reformulations immédiates de la définition. Infinitude de l'ensemble des nombres premiers (rappel).
   - Existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers (preuve de Zermello pour l'unicité).
   - Valuations p-adiques.
3. PGCD et PPCM :
   - Définition, formulations équivalentes, propriétés immédiates. Calculs à l'aide des valuations p-adiques.
   - Algorithme d'Euclide. Relation de Bézout (le théorème général est appelé théorème d'Eudoxe dans le cours). Formulation moderne de la relation de Bézout (pour $d \in \mathbb{N}$, $d = a \wedge b \Leftrightarrow a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$).
   - Entiers premiers entre eux. Lien premier/premiers entre eux. Théorème de Bézout (deux entiers sont premiers entre eux ssi il existe u et v tels que...). Lemme de Gauss. Théorème de Fermat.
   - Résolution des équations diophantiennes affines à deux inconnues.
   - PGCD de n entiers et relation de Bézout généralisée.
4. Exercices CCP n°86, n°94 et n°66.

Nombres rationnels.

1. Définition. Existence et unicité de la forme irréductible d'un nombre rationnel. Opérations sur $\mathbb{Q}$ et structure de corps.
2. Exemples de réels non rationnels.
   Caractère rationnel ou pas de $x\square y$ pour $\square \in \{+, -, \times, \div\}$ suivant que x et y sont ou pas rationnels.
3. Ordre standard sur $\mathbb{Q}$. Exemples de parties sans borne inférieure ou sans borne supérieure.
4. Implémentation en Python.

TECHNIQUES ALGORITHMIQUES DE CALCUL

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Développements limités

1. $DL_1(a)$: principe de l'approximation linéaire, définition d'un $DL_1(a)$, lien entre $DL_1(a)$ et dérivabilité en a. Exemples.
2. $DL_n(a)$: Définition d'un $DL_n(a)$. Unicité. Troncature d'un $DL_n(a)$. On se ramène à un $DL_n(0)$ par changement de variable. Exemple du $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
3. Méthodes de calcul d'un $DL_n(0)$: Formule de Taylor-Young. Changement de variable monomial dans un DL. DL d'une combinaison linéaire. Intégration d'un DL. Dérivation du $DL_{n+1}(0)$ **d'une fonction $\mathcal{C}^{n+1}$**. DL d'un produit. DL d'une composée.
4. DL usuels. La liste est en ligne.
5. Applications à des calculs de limites de fonctions en 0. Applications à des calculs de limites de suites.
6. Exercices CCP n° 2 (modifié : les développements en série entière ont été remplacés par des DL) et n° 56 .

ATTENTION : Les relations de comparaison seront vues plus tard. **Pas de "petits-o" ni de "grand-O", seulement des fonctions ε de limite nulle en 0.** (Bien sûr, un élève cultivé ou une élève cultivée a le droit de les utiliser si et seulement si il ou elle est capable de les définir.) On rappelle que tous les théorèmes sont admis mais les élèves doivent impérativement savoir leurs DL usuels.

Remarques :

- Il est demandé aux kholleurs de donner pour premier exercice une question de cours (voir en ligne la liste).
  Celle-ci doit être résolue **rapidement**, sans quoi le khollleur est en droit de passer brutalement à un second exercice.
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 30/11/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours

Mathématiques

Arithmétique.

10A $(\mathbb{Z}, +, \times, \leqslant)$ forme un anneau commutatif ordonné. Expliquer ce que cela signifie.

10B Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence, et qu'elle est stable par somme, produit et puissance. Une examinatrice ou un examinateur pourrait ne demander qu'une partie de ces propriétés.

10C Démontrer l'existence de la décomposition en facteurs premiers.

10D Démontrer l'infinitude des nombres premiers.

10E Définir les valuations p-adiques et en donner deux propriétés.

10F Montrer la relation de Bézout (théorème d'Eudoxe) : pour $a, b \in \mathbb{Z}$, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a \wedge b = au + bv$. Donner le cas particulier du théorème de Bézout. Une examinatrice ou un examinateur pourrait ne demander que ce cas.

10G Énoncer et démontrer le lemme de Gauss (on pourra admettre le théorème de Bézout).

10H Énoncer sans démonstration le petit théorème de Fermat.

Nombres rationnels.

11A $(\mathbb{Q}, +, \times)$ forme un corps et l'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$ est compatible à sa structure de corps. Expliquer ce que cela signifie.

11B Démontrer l'existence et l'unicité de la forme irréductible d'un nombre rationnel. Un examinateur ou une examinatrice ne demanderait que l'une des deux.

11C Montrer que le nombre d'or n'est pas rationnel.

Techniques algorithmiques de calcul

Développements limités

7α Donner le DL usuel demandé par l'examinateur ou l'examinatrice (il ou elle peut en demander plusieurs, mais uniquement issus de la liste en ligne).

7β Donner sans démonstration le théorème de Taylor-Young en 0.

7γ Peut-on intégrer un DL ? Peut-on dériver un DL ?

7δ Expliquer comment on peut calculer le DL d'une combinaison linéaire ou d'un produit, d'une composée. L'exmaniatrice ou l'examinateur ne pourra en demander qu'un ou deux.

7ϵ Donner un exemple pratique d'application des DLs.

Programme de khôlle

de la semaine du 07/12/2020

(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Nombres rationnels.

Reprise du programme précédent.

Nombres réels.

1. Structure de corps ordonné. Propriété de la borne supérieure. Caractérisation "avec des ε" des bornes supérieures. Application aux suites : théorème sur les limites des suites monotones (TLM).
2. Partie entière : Définition (existence et unicité). Caractère archimédien de $\mathbb{R}$. Approximations décimales d'un réel.
3. Topologie : Intervalles (définition exhaustive avec 10 cas, définition unificatrice, définition d'un segment et d'une partie convexe, équivalence entre être convexe et être un intervalle). Parties denses de $\mathbb{R}$ (définition, caractérisation par l'ordre, caractérisation séquentielle, densité de $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Droite réelle achevée.

TECHNIQUES ALGORITHMIQUES DE CALCUL

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Développements limités

1. $DL_1(a)$: principe de l'approximation linéaire, définition d'un $DL_1(a)$, lien entre $DL_1(a)$ et dérivabilité en a. Exemples.
2. $DL_n(a)$: Définition d'un $DL_n(a)$. Unicité. Troncature d'un $DL_n(a)$. On se ramène à un $DL_n(0)$ par changement de variable. Exemple du $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
3. Méthodes de calcul d'un $DL_n(0)$: Formule de Taylor-Young. Changement de variable monomial dans un DL. DL d'une combinaison linéaire. Intégration d'un DL. Dérivation du $DL_{n+1}(0)$ **d'une fonction $\mathcal{C}^{n+1}$**. DL d'un produit. DL d'une composée.
4. DL usuels. La liste est en ligne.
5. Applications à des calculs de limites de fonctions en 0. Applications à des calculs de limites de suites.
6. Exercices CCP n° 2 (modifié : les développements en série entière ont été remplacés par des DL) et n° 56 .

ATTENTION : Les relations de comparaison seront vues plus tard. **Pas de "petits-o" ni de "grand-O", seulement des fonctions $\boldsymbol{\varepsilon}$ de limite nulle en 0.** (Bien sûr, un élève cultivé ou une élève cultivée a le droit de les utiliser si et seulement si il ou elle est capable de les définir.) On rappelle que tous les théorèmes sont admis mais les élèves doivent impérativement savoir leurs DL usuels.

Remarques :

- Il est demandé aux kholleurs de donner pour premier exercice une question de cours (voir en ligne la liste).
  Celle-ci doit être résolue **rapidement**, sans quoi le kholleur est en droit de passer brutalement à un second exercice.
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 07/12/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours

Mathématiques

Nombres rationnels.

11A $(\mathbb{Q}, +, \times)$ forme un corps et l'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$ est compatible à sa structure de corps. Expliquer ce que cela signifie.

11B Démontrer l'existence et l'unicité de la forme irréductible d'un nombre rationnel. Un examinateur ou une examinatrice ne demanderait que l'une des deux.

11C Montrer que le nombre d'or n'est pas rationnel.

Nombres réels.

12A $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ forme un corps ordonné. Expliquer ce que cela signifie.

12B Énoncer la propriété de la borne supérieure.

12C Donner la caractérisation "avec des ε" des bornes supérieures dans $\mathbb{R}$.

12D Énoncer le théorème sur les limites des suites monotones. Le démontrer dans le cas croissant majoré.

12E Montrer l'existence ou l'unicité de la partie entière d'un réel positif.
L'examinatrice ou l'examinateur est vivement invité à ne demander que l'existence ou que l'unicité.
Seul le cas $x > 0$ a été détaillé en cours.

12F Donner une caractérisation simple des intervalles.

12G Donner deux caractérisations équivalentes de la densité dans $\mathbb{R}$ d'une partie D de $\mathbb{R}$ (il y en a quatre dans le cours...). Un examinateur ou une examinatrice sadique pourrait demander une démonstration.

12H Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Techniques algorithmiques de calcul

Développements limités

7α Donner le DL usuel demandé par l'examinateur ou l'examinatrice (il ou elle peut en demander plusieurs, mais uniquement issus de la liste en ligne).

7β Donner sans démonstration le théorème de Taylor-Young en 0.

7γ Peut-on intégrer un DL ? Peut-on dériver un DL ?

7δ Expliquer comment on peut calculer le DL d'une combinaison linéaire ou d'un produit, d'une composée. L'exmaniatrice ou l'examinateur ne pourra en demander qu'un ou deux.

7ϵ Donner un exemple pratique d'application des DLs.

Programme de khôlle

de la semaine du 14/12/2020

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Nombres réels.

Reprise du programme précédent.

Quelques sous-groupes

1. Caractérisation des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$. Application à la formulation moderne d'Eudoxe : preuve par les sous-groupes.
2. Caractérisation des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$. Application : densité de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{R}$.

Nombres complexes.

1. Définition de $\mathbb{C}$ et des opérations sur $\mathbb{C}$. Structure de corps algébriquement clos de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
2. Partie réelle, partie imaginaire, conjugaison , module, argument. Extraction de racines carrées (méthode algébrique) et équation du second degré à coefficients complexes.
3. Interprétations géométriques : Affixe, image. Transformation du plan, exemple de la conjugaison, exemple des similitudes directes, décomposition d'une similitude directe ayant un centre.
4. Un tout petit peu de topologie : Convexes. Ouverts. Fermés.
5. C'est l'occasion de réviser les Exercices CCP $n°84$ et $n°89$.

Techniques algorithmiques de calcul

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Développements limités

Reprise du programme précédent.

Calcul matriciel

1. Opérations sur les matrices : addition, multiplication. *Les propriétés sont admises.*
2. Matrices remarquables : matrice nulle, matrice identité, matrices élémentaires $E_{i,j}$, matrices diagonales, matrices triangulaires, matrices symétriques, matrices antisymétriques.
3. Matrices inversibles. Définition et cas des matrices 2×2.
4. Transposition. Linéarité de la transposition. Transposée d'un produit. Transposée d'une matrice inversible.

Attention, cette semaine : pas encore de polynômes de matrices, ni de binôme de Newton, ni de trace d'une matrice.

Remarques :

- Il est demandé aux kholleurs de donner pour premier exercice une question de cours (voir en ligne la liste).
  Celle-ci doit être résolue **rapidement**, sans quoi le kholleur est en droit de passer brutalement à un second exercice.
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 14/12/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours

Mathématiques

Nombres réels.

Même questions de cours que la semaine dernière.

Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$.

14A Énoncer et démontrer le théorème de classification de sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$. *Un examinateur ou une examinatrice pourrait ne demander qu'une partie de la démonstration.*

14B Énoncer sans démonstration le théorème de classification de sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

Nombres complexes.

13A $(\mathbb{C}, +, \times)$ forme un corps. Expliquer ce que cela signifie.

13B La conjuguaison est un morphisme de corps $\mathbb{R}$-linéaire et involutif. Expliquer ce que cela signifie.

13C Énoncer sans démonstration le théorème de d'Alembert-Gauss.

13D Énoncer l'inégalité triangulaire et donner son cas d'égalité.

13F Expliquer comment on peut résoudre une équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue complexe $z \in \mathbb{C}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

13G Donner la définition d'un ouvert, d'un fermé, dans $\mathbb{C}$.

13H Donner la définition d'une similitude directe et énoncer sans démonstration le théorème de décomposition des similitudes directes.

Techniques algorithmiques de calcul

Développements limités

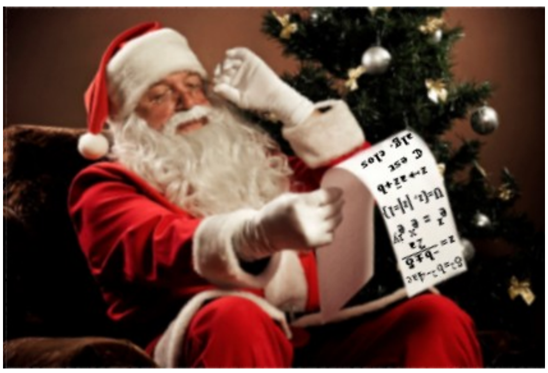
Mêmes questions de cours que la semaine dernière.

Calcul matriciel

8α Expliquer comment on calcule la somme/le produit de deux matrices, préciser à quelle condition cette opération a un sens.
Une examinatrice ou un examinateur pourrait ne demander que la somme ou que le produit.

8β Définir : matrice nulle, matrice identité, matrices élémentaires $E_{i,j}$, matrice triangulaire supérieure ou inférieure, matrice symétrique, matrice antisymétrique.
Un examinateur ou une examinatrice n'en demandererait qu'un sous-ensemble.

8γ Comment calcule-t-on l'inverse d'une matrice 2×2 ?



Joyeuses fêtes de fin d'année à tous

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 11/01/2021

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Nombres complexes.

Reprise du programme précédent.

Applications

1. Généralités : Applications de A dans B. Notations $\mathcal{F}(A, B)$ et B^A (privilégiée). Cardinal de B^A pour A et B finis.
2. Identités et composition. Fonctions réciproques.
3. Graphe d'une application. Cas d'une fonction réelle, graphe d'une fonction réciproque.
4. Restrictions, corestrictions, prolongements, coprolongements.
5. Bijectivité injectivité, surjectivité : Définitions. Comportement par composition. Lien avec l'inversibilité à droite, à gauche, avec l'existence d'une fonction réciproque.
6. Applications bijectives entre ensembles de même cardinal fini.

Important : Les définitions et les raisonnements sur les cardinaux sont informels à ce stade, le chapitre "dénombrements" sera traité plus tard. **L'objectif principal du chapitre est la maîtrise des notions d'injectivité, surjectivité, bijectivité, et application réciproque.**

Techniques algorithmiques de calcul

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Calcul matriciel

1. Opérations sur les matrices : addition, multiplication. *Les propriétés sont admises.*
2. Matrices remarquables : matrice nulle, matrice identité, matrices élémentaires $E_{i,j}$, matrices diagonales, matrices triangulaires, matrices symétriques, matrices antisymétriques.
3. Puissances et polynômes de matrices. Puissances d'une matrice diagonale. Matrices nilpotentes. Binôme de Newton.
4. Matrices inversibles. Définition et cas des matrices 2×2.
5. Application aux suites récurrentes linéaires mutuelles. Cas de l'exercice CCP $n°101$, mais avec calcul des puissances sans diagonalisation (par exemple avec le binôme de Newton). Le cours de probabilité n'ayant pas encore été traité, les examinateurs et les examinatrices feront preuve de bienveillance dans l'application de la formule des probabilités totales.
6. Transposition. Linéarité de la transposition. Transposée d'un produit. Transposée d'une matrice inversible.
7. Trace d'une matrice carrée. Linéarité. Propriété fondamentale de la trace. Trace d'une transposée.

Remarques :

- Désormais, les questions de cours seront exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 18/01/2021

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Suites

1. Définitions :
   a. Suite. Suite à valeurs réelles.
   b. Opérations algébriques sur les suites. Structure d'algèbre.
   c. Ordres sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Suites monotones, majorées, minorées, bornées, etc.
   d. Définition de la limite : Cas d'une limite finie, cas d'une limite infinie. Convergence. Divergence. Unicité de la limite.
2. Critères de convergence/divergence :
   a. Toute suite convergente est bornée.
   b. Théorème sur les limites des suites monotones (rappel). Version APCR ("à partir d'un certain rang").
   c. Théorème des gendarmes ("convergence par encadrement", "divergence par minoration", ...). Version APCR.
   d. Théorème des suites adjacentes. Version APCR.
3. Opérations algébriques sur les limites. Structure d'algèbre des suites convergentes.
4. Caractériations séquentielles :
   a. Densité (rappel).
   b. Bornes supérieures.
   c. Ouverts. Fermés.
   d. Continuité. Applications : exercice CCP $n°35$ pour $E = F = \mathbb{R}$.
5. Suites extraites :
   a. Définition. Propriétés immédiates des extractrices.
   b. Théorème fondamental sur les suites extraites.
   c. Théorème pair/impair sur les suites extraites.
6. Extension aux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$:
   a. Caractère borné.
   b. Convergence. CNS de convergence à l'aide des parties réelle et imaginaire. Condition suffisante de convergence à l'aide de la suite des modules et d'une suite d'arguments.

Notes aux examinateurs et aux examinatrices :

- La complétude a totalement disparu des programmes, y compris en spé. **Les suites de Cauchy n'existent pas.**
- Attention, de nombreux résultats n'ont pas encore été vus : se limiter à ce qui figure au programme.
  — Le théorème de Bolzano-Weierstrass n'a pas encore été vu.
  — L'expression du terme général d'une suite récurrente linéaire double n'a pas été vue.
  — Pas de suites récurrentes autonomes simples cette semaine.
  — La technique de comparaison avec une intégrale sera vue dans la chapitre sur les séries, elle n'a pas encore été évoquée.

Techniques algorithmiques de calcul

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Déterminants "à la Arnold"

Déterminant dans la base canonique (produit mixte) de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, déterminant d'une matrice : techniques de calcul.

1. Développement par rapport à une colonne ou une ligne.
2. Déterminant d'une matrice triangulaire.
3. Déterminant d'une transposée.
4. Caractère n-linéaire, antisymétrique, alterné, par rapport aux colonnes ou par rapport aux lignes.
5. Effet d'une opération élémentaire sur les colonnes sur le déteminant.
6. CNS d'inversibilité d'une matrice $n \times n$ portant sur son déterminant.
7. Exercice CCINP $n°$ 63 questions 1 et 2.
8. Déterminant de Vandermonde.

Sont **hors-programme** cette semaine :

— la *définition* du déterminant,
— la formule sur le déterminant d'un produit,
— la notion de déterminant de n vecteurs sur un autre espace que $\mathbb{R}^n$ ou dans une autre base que la base canonique,
— la notion de déterminant d'un endomorphisme,
— la notion d'endomorphisme,
— la notion de signature,
— l'expression du terme général d'une suite récurrente linéaire double.

Remarques :

- Désormais, les questions de cours seront exclusivement donnés à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 18/01/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours **données exclusivement à titre indicatif**

Mathématiques

Suites numériques

Remarque : pour toutes les questions de cours demandant à énoncer un résultat, un examinateur ou une examinatrice pourrait demander une démonstration.

- 15A Donner la définition de la limite d'une suite.
  L'examinatrice au l'examinateur pourrait ne demander que le cas fini, ou l'un des deux cas infinis, ou les trois.
- 15B Montrer qu'une suite convergente a une limite unique.
- 15C Montrer qu'une suite convergente est bornée.
- 12D Énoncer et démontrer le théorème sur les limites des suites monotones.
- 15D Énoncer et démontrer le théorème des gendarmes dans le cas d'une limite finie ("convergence par encadrement").
- 15E Énoncer le théorème des suites adjacentes.
- 12G Donner la caractérisation séquentielle de la densité.
- 15F Donner la caractérisation séquentielle des bornes supérieures.
- 15G Donner la caractérisation séquentielle de la continuité.
- 15H Énoncer le théorème fondamental sur les suites extraites.
- 15I Énoncer le théorème pair/impair sur les suites extraites.

Techniques algorithmiques de calcul

Déterminants à la Arnol'd

- 9α Expliquez comment on calcule un déterminant en développant par rapport à une ligne ou une colonne.
- 9β Le déterminant est n-linéaire, antisymétrique, alterné : expliquer ce que cela signifie.
- 9γ Expliquer l'effet d'une opération élémentaire sur le déterminant.
- 9ε À quoi servent les déterminants ?

Programme de khôlle

de la semaine du 18/01/2021

(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Suites

1. Définitions :
   a. Suite. Suite à valeurs réelles.
   b. Opérations algébriques sur les suites. Structure d'algèbre.
   c. Ordres sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Suites monotones, majorées, minorées, bornées, etc.
   d. Définition de la limite : Cas d'une limite finie, cas d'une limite infinie. Convergence. Divergence. Unicité de la limite.
2. Critères de convergence/divergence :
   a. Toute suite convergente est bornée.
   b. Théorème sur les limites des suites monotones (rappel). Version APCR ("à partir d'un certain rang").
   c. Théorème des gendarmes ("convergence par encadrement", "divergence par minoration", ...). Version APCR.
   d. Théorème des suites adjacentes. Version APCR.
3. Opérations algébriques sur les limites. Structure d'algèbre des suites convergentes.
4. Caractériations séquentielles :
   a. Densité (rappel).
   b. Bornes supérieures.
   c. Ouverts. Fermés.
   d. Continuité. Applications : exercice CCP $n°35$ pour $E = F = \mathbb{R}$. La limite d'une suite récurrente autonome simple à itératrice continue définie sur un intervalle fermé est nécessairement un point fixe. Application : exercice CCP $n°43$.
5. Suites extraites :
   a. Définition. Propriétés immédiates des extractrices.
   b. Théorème fondamental sur les suites extraites.
   c. Théorème pair/impair sur les suites extraites.
6. Extension aux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$:
   a. Caractère borné.
   b. Convergence. CNS de convergence à l'aide des parties réelle et imaginaire. Condition suffisante de convergence à l'aide de la suite des modules et d'une suite d'arguments.

Notes aux examinateurs et aux examinatrices :

- La complétude a totalement disparu des programmes, y compris en spé. **Les suites de Cauchy n'existent pas.**
- Attention, de nombreux résultats n'ont pas encore été vus : se limiter à ce qui figure au programme.
  — Le théorème de Bolzano-Weierstrass n'a pas encore été vu.
  — L'expression du terme général d'une suite récurrente linéaire double n'a pas été vue.
  — Sur les suites récurrentes autonomes simples, le seul théorème connu à ce stade est que la limite si elle existe est un point fixe.
  — La technique de comparaison avec une intégrale sera vue dans la chapitre sur les séries, elle n'a pas encore été évoquée.

Ordre supérieur

1. Exemples d'applications d'ordre supérieur (c'est à dire entre ensembles de parties ou d'applications), exemples de quantifications à l'ordre supérieur (c'est à dire sur des ensembles de parties ou d'applications).
2. Applications "image directe par f" (notée $f^{\rightarrow}$ ou f) et "image réciproque par f" (notée $f^{\leftarrow}$ ou f^{-1}). Exemples. Croissance pour l'inclusion. Propriétés immédiates.
3. Application caractéristique $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ (je note χ_A son coprolongement à $\mathbb{R}$) d'une partie A d'un ensemble E. Exemples et propriétés immédiates. *Bijection* $\mathbb{1} : A \mapsto \mathbb{1}_A$ *entre* $\mathcal{P}(E)$ *et* $\{0,1\}^E$.

TECHNIQUES ALGORITHMIQUES DE CALCUL

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Déterminants "à la Arnold"

Reprise du programme précédent.

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 25/01/2020

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours **données exclusivement à titre indicatif**

Mathématiques

Suites numériques

Remarque : pour toutes les questions de cours demandant à énoncer un résultat, un examinateur ou une examinatrice pourrait demander une démonstration.

15A Donner la définition de la limite d'une suite.
L'examinatrice au l'examinateur pourrait ne demander que le cas fini, ou l'un des deux cas infinis, ou les trois.

15B Montrer qu'une suite convergente a une limite unique.

15C Montrer qu'une suite convergente est bornée.

12D Énoncer et démontrer le théorème sur les limites des suites monotones.

15D Énoncer et démontrer le théorème des gendarmes dans le cas d'une limite finie ("convergence par encadrement").

15E Énoncer le théorème des suites adjacentes.

12G Donner la caractérisation séquentielle de la densité.

15F Donner la caractérisation séquentielle des bornes supérieures.

15G Donner la caractérisation séquentielle de la continuité.

15H Énoncer le théorème fondamental sur les suites extraites.

15I Énoncer le théorème pair/impair sur les suites extraites.

Ordre supérieur

16A Pour $f : A \to B$, montrer que les applications "image directe par f" et "image réciproque par f" sont croissantes pour l'inclusion.

16B Pour $f : A \to B$, que dire de $f^{-1}(\emptyset)$, $f(\emptyset)$, $f^{-1}(B)$, $f(A)$?

16C Montrer que l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$.

16D Donner avec démonstration $\mathbb{1}_{^cA}$, $\mathbb{1}_{A\cup B}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\Delta B}$.

Techniques algorithmiques de calcul

Déterminants à la Arnol'd

9α Expliquez comment on calcule un déterminant en développant par rapport à une ligne ou une colonne.

9β Le déterminant est n-linéaire, antisymétrique, alterné : expliquer ce que cela signifie.

9γ Expliquer l'effet d'une opération élémentaire sur le déterminant.

9ε À quoi servent les déterminants ?

Programme de khôlle

de la semaine du 01/02/2021

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Limite d'une fonction à valeurs réelles

1. Points adhérents à une réunion d'intervalles. Voisinages (de $\pm\infty$ ou d'un réel). Pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, notion de propriété vraie *au voisinage d'un point* adhérent à I. Extrema locaux.
2. Limites : définition à l'aide des voisinages. Rappel des neufs cas pratiques. Limites à gauche, à droite, épointées : définition.
3. Propriétés algébriques des limites, limite d'une composée. Propriétés topologiques des limites. Théorème des gendarmes. Théorème sur les limites des fonctions monotones. Caractérisation séquentielle de la limite.

Continuité : le début

1. Continuité : Définition, exemples, contre-exemples. *Caractérisation séquentielle.*
   On garde l'exercice CCP n° 35 (pour $E = F = \mathbb{R}$) cette semaine encore.
   Opérations sur les fonctions continues : stablité par composition et structure d'algèbre de l'espace $\mathcal{C}(I, R)$.
2. Théorème des valeurs intermédiaires. Version TS (sur un intervalle fermé borné, sur un intervalle ouvert). Version sup (si f est continue, alors f est PVI, *i. e.* l'image directe par f d'un intervalle est un intervalle).
3. Théorème de la bijection. Sur un fermé, sur un ouvert (les limites en a^+ et b^- existent nécessairement par TLM).

Techniques algorithmiques de calcul

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Opérations élémentaires sur les systèmes et les matrices

1. Systèmes $p \times q$: définitions, préservation de l'ensemble des solutions par opérations élémentaires, algorithme du pivot de Gauss pour la résolution.
2. Opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes d'une matrice. Traduction comme produit par des matrices remarquables à gauche, à droite.
3. Matrices associées à un système linéaire (matrice des coefficients, matrice étendue) et reformulation de l'algorithme du pivot de Gauss en termes d'opérations élémentaires sur les lignes.
4. Inversion ou calcul du rang d'une matrice par le pivot de Gauss.
5. Détermination d'une décomposition $PMQ = J_r$.

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 01/02/2021

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours **données exclusivement à titre indicatif**

Mathématiques

Limite d'une fonction à valeurs réelles

17A Qu'est-ce qu'une propriété vraie "au voisinage de a ?

17B Donner la définition de $\lim_a f = \ell$.

Il y a 9 cas (10 en considérant la version unificatrice avec les voisinages) ; un examinateur ou une examinatrice n'en demanderait qu'un ou deux.

17C Donner les définitions de $\lim_{a^+} f$ et de $\lim_{a^-} f$.

17D Énoncer le théorème de caractérisation séquentielle des limites. Un examinateur ou une examinatrice pourrait, ou pas, demander une démonstration mais uniquement du cas où a et ℓ sont finis.

17E Énoncer le théorème des gendarmes, le théorème sur les limites des fonctions monotones et le théorème sur les opérations sur les limites.

Continuité

18A Définir la continuité en un point, la continuité sur un intervalle. Donner un exemple de fonction discontinue en un seul point. Donner un exemple de fonction discontinue en tout point.

18B Donner la caractérisation séquentielle de la continuité et deux exemples d'applications.

18C Énoncer trois versions du TVI et deux versions du théorème de la bijection.

3B Démontrer la proposition permettant de définir arccos.

Techniques algorithmiques de calcul

Opérations élémentaires

10α Expliquer le principe de l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre un système $p \times q$.

10β Donner la traduction des opérations élémentaires sur les lignes à l'aide de produits matriciels.

$10\beta_{\text{bis}}$ Même question pour les colonnes.

10γ Expliquer comment on peut inverser une matrice à l'aide de l'algorithme de Gauss.

10δ Expliquer ce qu'est une décomposition PJ_rQ et comment on peut en obtenir une.

Programme de khôlle

de la semaine du 08/02/2021

(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Continuité

1. Continuité : Définition, exemples, contre-exemples. *Caractérisation séquentielle.*
   Voilà un mois qu'on se traîne l'exercice CCINP n° 35 (pour $E = F = \mathbb{R}$)...
   Opérations sur les fonctions continues : stablité par composition et structure d'algèbre de l'espace $\mathcal{C}(I, R)$.
2. Théorème des valeurs intermédiaires. Version TS (sur un intervalle fermé borné, sur un intervalle ouvert). Version sup (si f est continue, alors f est PVI, *i. e.* l'image directe par f d'un intervalle est un intervalle).
3. Théorème de la bijection. Sur un fermé, sur un ouvert (les limites en a^+ et b^- existent nécessairement par TLM).
4. Caractérisation des bijections continues : Monotonie d'une injection continue sur un intervalle. Continuité d'une surjection strictement monotone. Continuité de la bijection réciproque d'une fonction continue.
5. Fonctions uniformément continues : Définition, exemples, contre-exemples. Uniformément continue implique continue.
6. Fonctions lipschitziennes : Définition, exemples, contre-exemples. Lipschitzienne implique uniformément continue.
7. Généralisations (des résultats qui peuvent être généralisés !) aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

ATTENTION : **Aucun résultat de compacité cette semaine : pas d'image continue d'un segment, pas de théorème de Heine.**

Relations de comparaison sur les suites et les fonctions

1. Domination : Définitions. Exemples usuels. Réflexivité, transitivité.
2. Négligeabilité : Définitions. Transitivité. Absorption des constantes, stabilité par somme, compatibilité aux produits. Exemples usuels (réinterprétation des croissances comparées).
3. Équivalence : Définition. C'est une relation d'équivalence. Propriétés algébriques. Équivalents classiques (la formule de Stirling a été provisoirement admise). Lien avec la négligeabilité et corollaire : un DL est équivalent à son premier terme non nul.
4. Développements asymptotiques : Définition. Exemples élémentaires.
5. Exercice CCINP n° 1.

TECHNIQUES ALGORITHMIQUES DE CALCUL

Rappel : en techniques algorithmes de calcul, aucune démonstration n'est à connaître.

Dernière semaine avec des techniques algorithmiques de calcul ! ☹

Opérations élémentaires sur les systèmes et les matrices

1. Systèmes $p \times q$: définitions, préservation de l'ensemble des solutions par opérations élémentaires, algorithme du pivot de Gauss pour la résolution.
2. Opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes d'une matrice. Traduction comme produit par des matrices remarquables à gauche, à droite.
3. Matrices associées à un système linéaire (matrice des coefficients, matrice étendue) et reformulation de l'algorithme du pivot de Gauss en termes d'opérations élémentaires sur les lignes.
4. Inversion ou calcul du rang d'une matrice par le pivot de Gauss.
5. Détermination d'une décomposition $PMQ = J_r$.

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaitent poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 08/02/2021

(Maths - MPSI)

LISTE DE QUESTIONS DE COURS **DONNÉES EXCLUSIVEMENT À TITRE INDICATIF**

MATHÉMATIQUES

Continuité

18A Définir la continuité en un point, la continuité sur un intervalle. Donner un exemple de fonction discontinue en un seul point. Donner un exemple de fonction discontinue en tout point.

18B Donner la caractérisation séquentielle de la continuité et deux exemples d'applications.

18C Énoncer trois versions du TVI et deux versions du théorème de la bijection.

18D Énoncer le théorème de monotonie d'une injection continue sur un intervalle.

18E Énoncer le théorème de continuité d'une bijection réciproque.

18F Donner la définition de l'uniforme continuité et un exemple de fonction continue non uniformément continue.

18G Montrer qu'une application lipschitzienne est uniformément continue, et donner un contre-exemple à la réciproque.

Relations de comparaison sur les suites et les fonctions

19A Donner la définition de $f = O_a(g)$ (respectivement $u_n = O(v_n)$) dans le cas où g (respectivement $(v_n)_n$) ne s'annule pas au voisinage de a (respectivement ACR), dans le cas général.

19A$_{\text{bis}}$ Donner la définition de $f = o_a(g)$ (respectivement $u_n = o(v_n)$) dans le cas où g (respectivement $(v_n)_n$) ne s'annule pas au voisinage de a (respectivement ACR), dans le cas général.

19A$_{\text{ter}}$ Donner la définition de $f \sim_a (g)$ (respectivement $u_n \sim v_n$) dans le cas où g (respectivement $(v_n)_n$) ne s'annule pas au voisinage de a (respectivement ACR), dans le cas général.

19B Donner avec démonstration trois propriétés vérifiées par la relation de négligeabilité.

19C Donner avec démonstration trois propriétés vérifiées par la relation $\sim$.

19D Donner avec démonstration le lien entre équivalence et négligeabilité.

19E Définir ce qu'est un développement asymptotique.

19F Énoncer trois croissances comparées en termes de négligeabilité.

19G Montrer : pour $q > 0$: $q^n = o(n!)$; et $n! = o(n^n)$.

TECHNIQUES ALGORITHMIQUES DE CALCUL

Opérations élémentaires

10α Expliquer le principe de l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre un système $p \times q$.

10β Donner la traduction des opérations élémentaires sur les lignes à l'aide de produits matriciels.

10β_{bis} Même question pour les colonnes.

10γ Expliquer comment on peut inverser une matrice à l'aide de l'algorithme de Gauss.

10δ Expliquer ce qu'est une décomposition PJ_rQ et comment on peut en obtenir une.

Programme de khôlle

de la semaine du 01/03/2021

(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Relations de comparaison sur les suites et les fonctions

1. Domination : Définitions. Exemples usuels. Réflexivité, transitivité.
2. Négligeabilité : Définitions. Transitivité. Absorption des constantes, stabilité par somme, compatibilité aux produits. Exemples usuels (réinterprétation des croissances comparées).
3. Équivalence : Définition. C'est une relation d'équivalence. Propriétés algébriques. Équivalents classiques (la formule de Stirling a été provisoirement admise). Lien avec la négligeabilité et corollaire : un DL est équivalent à son premier terme non nul.
4. Développements asymptotiques : Définition. Exemples élémentaires.
5. Exercice CCINP $n°1$.

Compacité

1. Théorèmes fondamentaux :
   — Théorème de Bolzano-Weierstrass. Cas d'une suite à valeurs complexes.
   — Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
   L'image directe d'un segment par une fonction continue est un segment.
   — Théorème de Heine : toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.
2. Applications au calcul intégral :
   — Approximation uniforme des fonctions continues par morceau par les fonctions en escalier. Application à la construction de l'intégrale de Riemann : intégrale d'une fonction en escalier, d'une fonction Riemann-intégrable, Riemann-intégrabilité des fonctions continues par morceaux.
   — Digression : rappel des propriétés de l'intégrale : positivité, linéarité, croissance, inégalité triangulaire sur $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, caractère défini positif sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, Chasles. **Attention :** les propriétés sont admises en indiquant seulement comment on pourrait les démontrer, ne pas interroger sur leurs preuves.
   Application : inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales, exercices CCINP $n°76$ et 79 (temporairement modifés en enlevant les références aux espaces préhilbertiens).
   — Théorème fondamental de l'analyse. C'est l'occasion de réviser les exercices CCINP $n°31-1$ et 56.
   — Théorème de convergence des sommes de Riemann

<u>Remarques :</u>

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données <u>à titre indicatif</u>. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 01/03/2021

(Maths - MPSI)

LISTE DE QUESTIONS DE COURS **DONNÉES EXCLUSIVEMENT À TITRE INDICATIF**

MATHÉMATIQUES

Relations de comparaison sur les suites et les fonctions

- 19A Donner la définition de $f = O_a(g)$ (respectivement $u_n = O(v_n)$) dans le cas où g (respectivement $(v_n)_n$) ne s'annule pas au voisinage de a (respectivement ACR), dans le cas général.
- 19Abis Donner la définition de $f = o_a(g)$ (respectivement $u_n = o(v_n)$) dans le cas où g (respectivement $(v_n)_n$) ne s'annule pas au voisinage de a (respectivement ACR), dans le cas général.
- 19Ater Donner la définition de $f \sim_a (g)$ (respectivement $u_n \sim v_n$) dans le cas où g (respectivement $(v_n)_n$) ne s'annule pas au voisinage de a (respectivement ACR), dans le cas général.
- 19B Donner avec démonstration trois propriétés vérifiées par la relation de négligeabilité.
- 19C Donner avec démonstration trois propriétés vérifiées par la relation $\sim$.
- 19D Donner avec démonstration le lien entre équivalence et négligeabilité.
- 19E Définir ce qu'est un développement asymptotique.
- 19F Énoncer trois croissances comparées en termes de négligeabilité.
- 19G Montrer : pour $q > 0$: $q^n = o(n!)$; et $n! = o(n^n)$.

Compacité et intégration

- 20A Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- 20B Énoncer le théorème des bornes atteintes. Que dire de l'image d'un segment par une fonction continue ?
- 20C Énoncer le théorème de Heine.
- 20D Toute fonction continue peut être uniformément approchée par des fonctions en escalier.
  Qu'est-ce que cela veut dire ? À quoi cela sert-il ?
- 20E Énoncer et démontrer le théorème de Cauchy-Schwarz sur les intégrales.
- 20F Énoncer le théorème fondamental de l'analyse. Donner l'idée de la démonstration sans entrer dans les détails.
- 20G Énoncer le théorème de convergence des sommes de Riemann pour une fonction $k-$lipschitzienne, pour une fonction continue.
  Donner l'idée (et seulement l'idée) de la démonstration lorsque la fonction est $k-$lipschitzienne.
  Donner l'idée (et seulement l'idée) de la démonstration lorsque la fonction est seulement continue.

Programme de khôlle

de la semaine du 08/03/2021

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Compacité

1. Théorèmes fondamentaux :
   - Théorème de Bolzano-Weierstrass. Cas d'une suite à valeurs complexes.
   - Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. L'image directe d'un segment par une fonction continue est un segment.
   - Théorème de Heine : toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.
2. Applications au calcul intégral :
   - Approximation uniforme des fonctions continues par morceau par les fonctions en escalier. Application à la construction de l'intégrale de Riemann : intégrale d'une fonction en escalier, d'une fonction Riemann-intégrable, Riemann-intégrabilité des fonctions continues par morceaux.
   - Digression : rappel des propriétés de l'intégrale : positivité, linéarité, croissance, inégalité triangulaire sur $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, caractère défini positif sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, Chasles. **Attention :** les propriétés sont admises en indiquant seulement comment on pourrait les démontrer, ne pas interroger sur leurs preuves.
     Application : inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales, exercices CCINP $n°76$ et 79 (temporairement modifés en enlevant les références aux espaces préhilbertiens).
   - Théorème fondamental de l'analyse. C'est l'occasion de réviser les exercices CCINP $n°31-1$ et 56.
   - Théorème de convergence des sommes de Riemann.

Structures algébriques

1. Structures : Groupes. Anneaux. Corps. Espaces vectoriels. Algèbres. Définitions et propriétés élémentaires. Exemples de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, des anneaux de matrices carrées, des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Sous-structures : Sous-groupes, sous-anneaux, sous-corps, sous-espaces vectoriels. Définitions équivalentes. Propriétés élémentaires.
3. Morphismes : Morphisme de groupe, d'anneau, de corps, applications linéaires entre espaces vectoriels.
   Image et noyau d'un morphisme de groupe et leurs propriétés élémentaires.
   Isomorphismes.
4. C'est l'occasion de réviser l'exercice CCP $n°$ 66.

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 08/03/2021

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours **données exclusivement à titre indicatif**

Mathématiques

Compacité et intégration

20A Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

20B Énoncer le théorème des bornes atteintes. Que dire de l'image d'un segment par une fonction continue ?

20C Énoncer le théorème de Heine.

20D Toute fonction continue peut être uniformément approchée par des fonctions en escalier.
Qu'est-ce que cela veut dire ? À quoi cela sert-il ?

20E Énoncer et démontrer le théorème de Cauchy-Schwarz sur les intégrales.

20F Énoncer le théorème fondamental de l'analyse. Donner l'idée de la démonstration sans entrer dans les détails.

20G Énoncer le théorème de convergence des sommes de Riemann pour une fonction $k-$lipschitzienne, pour une fonction continue.
Donner l'idée (et seulement l'idée) de la démonstration lorsque la fonction est $k-$lipschitzienne.
Donner l'idée (et seulement l'idée) de la démonstration lorsque la fonction est seulement continue.

Structures algébriques

21A Définir ce qu'est un groupe et donner trois exemples.

21B Définir S_n et dresser la liste des éléments de S_3.

21C Définir ce qu'est un anneau, un corps. Donner un exemple d'anneau non commutatif et un exemple d'anneau commutatif mais non intègre.

21D Donner les formules générales du binôme de Newton de l'identité géométrique généralisée dans un anneau quelconque

21E Définir ce qu'est un sous-groupe, un sous-anneau, un sous-corps.

21F Définir ce qu'est un morphisme de groupe et donner une caractérisation équivalente. Définir les isomorphismes de groupe.

21G Définir le noyau et l'image d'un morphisme de groupe. Montrer que ce sont des sous groupes. À quoi servent ces trucs ?

Programme de khôlle

de la semaine du 15/03/2021

(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Structures algébriques

Éventuellement : reprise du programme précédent, en particulier l'exercice CCP $n°$ 66.

Espaces et sous-espaces vectoriels.

1. Espace vectoriel (ev) : définition. Le produit de n evs est naturellement muni d'une structure d'ev.
2. Sous-espace vectoriel (sev) : définitions équivalentes. Structure d'ev. L'intersection d'une famille de sevs est un sev.
3. Somme de n sevs. Cas des sommes directes. Sevs suppémentaires.
4. Espace vectoriel engendré par une partie : définitions équivalentes, propriétés immédiates.

Attention : RIEN D'AUTRE QUE CE QUI PRÉCÈDE cette semaine !

- **Pas de familles de vecteurs. En particulier : pas de familles libres, pas de familles génératrices, pas de bases.**
- **Pas d'applications linéaires, rien qui a trait aux applications linéaires.**
- **Pas de dimension, rien qui a trait à la dimension.**

En revanche, les élèves doivent savoir :

- montrer qu'une partie de E est, ou pas, un sev (à tester en priorité) ;
- décrire plus simplement une somme de sevs ou un sev engendré ;
- montrer que deux sevs sont supplémentaires par analyse-synthèse.

Dérivabilité.

1. Dérivabilité en un point : Définition du taux d'accroissement en un point, de la dérivée en un point. Dérivabilité à gauche, à droite. Tangentes. f **dérivable en a** $\Leftrightarrow$ f **a un** $DL_1(a)$**.**
2. Dérivabilité sur I : définition, exemples, contre-exemples. Espaces $\mathcal{D}^1(I, R)$ et $\mathcal{C}^1(I, R)$, opérations sur les fonctions dérivables et continûment dérivables, inclusions $\mathcal{C}^1(I, R) \subset \mathcal{D}^1(I, R) \subset \mathcal{C}^0(I, R)$. Exercice CCINP $n°$ 4.
3. Théorèmes sur la dérivée des fonctions composées et sur la dérivée d'une fonction réciproque.
4. Rolle et accroissements finis : Lemme de Fermat (condition nécessaire d'extremum local pour f dérivable). Théorème de Rolle. Égalité des accroissement finis. Inégalité des accroissements finis. Reformulation à l'aide de la lipschitzianité.
5. Étude globale : Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction **sur un intervalle**. Plan d'étude d'une fonction. Interprétation géométrique de la croissance de la dérivée.
6. Dérivabilité et caractère $\mathcal{C}^1$: Fonctions $\mathcal{D}^1$ non $\mathcal{C}^1$. Fonctions $\mathcal{D}^0$ et théorème de Darboux (éclairant mais hors programme, donc non exigible des étudiants). Théorème sur la limite de la dérivé. Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.

Attention : l'étude des asymptotes à une courbe sera traitée plus tard.

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 15/03/2021

(Maths - MPSI)

LISTE DE QUESTIONS DE COURS **DONNÉES EXCLUSIVEMENT À TITRE INDICATIF**

MATHÉMATIQUES

Structures algébriques

21A Définir ce qu'est un groupe et donner trois exemples.

21B Définir S_n et dresser la liste des éléments de S_3.

21C Définir ce qu'est un anneau, un corps. Donner un exemple d'anneau non commutatif et un exemple d'anneau commutatif mais non intègre.

21D Donner les formules générales du binôme de Newton de l'identité géométrique généralisée dans un anneau quelconque

21E Définir ce qu'est un sous-groupe, un sous-anneau, un sous-corps.

21F Définir ce qu'est un morphisme de groupe et donner une caractérisation équivalente. Définir les isomorphismes de groupe.

21G Définir le noyau et l'image d'un morphisme de groupe. Montrer que ce sont des sous groupes. À quoi servent ces trucs ?

Espaces et sous-espaces vectoriels.

22A Donner six exemples de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

22B Montrer qu'une intersection ou une somme de sevs est un sev.

22C Définir ce qu'est une somme de sevs, une somme directe, des sevs supplémentaires. Donner des exemples.

22D Définir ce qu'est un sous-espace vectoriel engendré (une seule version). Montrer que c'est un sev.

22E Montrer qu'on a $\operatorname{Vect}(F_1 \cup F_2) = F_1 + F_2$.

Dérivabilité

23A Définir ce qu'est une fonction dérivable et donner un exemple de fonction dérivable non $\mathcal{C}^1$.Le khôlleur pourrait, ou pas, demander une démonstration.

23B Montrer qu'une fonction est dérivable en a si et seulement si elle a un $DL_1(a)$.

23C Montrer qu'une fonction dérivable est continue.

23D Énoncer et démontrer le thèorème de dérivation des fonctions composées.

23E Énoncer et démontrer le thèorème de dérivation des fonctions réciproques.

23F Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

23G Énoncer et démontrer l'égalité des accroissements finis.

23H Énoncer et démontrer l'inégalité des accroissements finis. Comment peut-on la reformuler ?

23I Énoncer et démontrer (un cas du) théorème sur le signe de la dérivée.

23J Énoncer et démontrer le théorème sur la limite de la dérivée. Quelle différence avec le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$?

Programme de khôlle

de la semaine du 22/03/2021

(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Espaces et sous-espaces vectoriels. Reprise du programme précédent :

1. Espace vectoriel (ev) : définition. Le produit de n evs est naturellement muni d'une structure d'ev.
2. Sous-espace vectoriel (sev) : définitions équivalentes. Structure d'ev. L'intersection d'une famille de sevs est un sev.
3. Somme de n sevs. Cas des sommes directes. Sevs suppémentaires.
4. Espace vectoriel engendré par une partie : définitions équivalentes, propriétés immédiates.

Familles dans les espaces vectoriels.

1. Familles finies ou infinies dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Sous-familles. Combinaisons linéaires des vecteurs d'une famille (finie ou infinie)
2. Familles libres, familles génératrices, bases. Application du déterminant de Vandermonde pour établir une liberté.
3. Base adaptée à une somme directe (de deux sevs, de n sevs). Application aux sous-espaces supplémentaires.

ATTENTION :

- **TOUJOURS PAS D'APPLICATIONS LINÉAIRES !**
- **TOUJOURS PAS DE DIMENSION !**

Dérivabilité. Reprise du programme précédent :

1. Dérivabilité en un point : Définition du taux d'accroissement en un point, de la dérivée en un point. Dérivabilité à gauche, à droite. Tangentes. f **dérivable en a** $\Leftrightarrow$ f **a un** $DL_1(a)$**.**
2. Dérivabilité sur I : définition, exemples, contre-exemples. Espaces $\mathcal{D}^1(I,R)$ et $\mathcal{C}^1(I,R)$, opérations sur les fonctions dérivables et continûment dérivables, inclusions $\mathcal{C}^1(I,R) \subset \mathcal{D}^1(I,R) \subset \mathcal{C}^0(I,R)$. Exercice CCINP $n°$ 4.
3. Théorèmes sur la dérivée des fonctions composées et sur la dérivée d'une fonction réciproque.
4. Rolle et accroissements finis : Lemme de Fermat (condition nécessaire d'extremum local pour f dérivable). Théorème de Rolle. Égalité des accroissement finis. Inégalité des accroissements finis. Reformulation à l'aide de la lipschitzianité.
5. Étude globale : Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction **sur un intervalle**. Plan d'étude d'une fonction. Interprétation géométrique de la croissance de la dérivée.
6. Dérivabilité et caractère $\mathcal{C}^1$: Fonctions $\mathcal{D}^1$ non $\mathcal{C}^1$. Fonctions $\mathcal{D}^0$ et théorème de Darboux (éclairant mais hors programme, donc non exigible des étudiants). Théorème sur la limite de la dérivé. Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.

Fonctions "mieux que dérivables".

1. Dérivées d'ordre supérieur : Dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une combinaison linéaire, d'un produit (formule de Leibniz), de $x \mapsto f(\alpha x+\beta)$. C'est l'occasion de réviser l'exercice CCINP $n°3$.
   Dérivées $n^{\text{ième}}$ de fonctions usuelles.
   Théorème de prolongement $\mathcal{C}^n$.
2. Formules de Taylor : Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange sous l'hypothèse $\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Application à des calculs de limites ou d'approximations. Formule de Taylor-Young sous l'hypothèse $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.
   L'ÉGALITÉ DE TAYLOR LAGRANGE EST EXPLICITEMENT HORS-PROGRAMME ☹.
3. Retour sur les développements limités : Définition. CNS d'existence à l'ordre 0 et à l'ordre 1. CS d'existence à l'ordre n (Taylor-Young). Unicité. Parité, imparité. C'est le moment de réviser ses développements limités usuels (V2) . Applications à des calculs de limites, d'équivalents simples, de développements asymptotiques, applications à des déterminations de positions relatives local d'une courbe avec ses tangentes ou avec ses asymptotes, application à la nature d'un point critique.

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 22/03/2021

(Maths - MPSI)

LISTE DE QUESTIONS DE COURS **DONNÉES EXCLUSIVEMENT À TITRE INDICATIF**

MATHÉMATIQUES

Espaces et sous-espaces vectoriels. Reprise :

22A Donner six exemples de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

22B Montrer qu'une intersection ou une somme de sevs est un sev.

22C Définir ce qu'est une somme de sevs, une somme directe, des sevs supplémentaires. Donner des exemples.

22D Définir ce qu'est un sous-espace vectoriel engendré (une seule version). Montrer que c'est un sev.

22E Montrer qu'on a $\mathrm{Vect}\,(F_1 \cup F_2) = F_1 + F_2$.

Familles dans les espaces vectoriels.

24A Définir ce qu'est une droite, un plan, un hyperplan (vectoriels). Donner des exemples.

24B Définir ce qu'est une famille libre, une famille liée, une famille génératrice, une base.

24C Montrer qu'une famille est une base si et seulement si elle est libre et génératrice.

24D Définir le déterminant de Vandermonde et donner son expression. À quoi peut-il servir dans ce chapitre ?

24E Montrer qu'une somme de droites est directe ssi leurs vecteurs directeurs forment une famille libre.

Dérivabilité Reprise :

23A Définir ce qu'est une fonction dérivable et donner un exemple de fonction dérivable non $\mathcal{C}^1$.Le khôlleur pourrait, ou pas, demander une démonstration.

23B Montrer qu'une fonction est dérivable en a si et seulement si elle a un $DL_1(a)$.

23C Montrer qu'une fonction dérivable est continue.

23D Énoncer et démontrer le thèorème de dérivation des fonctions composées.

23E Énoncer et démontrer le thèorème de dérivation des fonctions réciproques.

23F Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

23G Énoncer et démontrer l'égalité des accroissements finis.

23H Énoncer et démontrer l'inégalité des accroissements finis. Comment peut-on la reformuler ?

23I Énoncer et démontrer (un cas du) théorème sur le signe de la dérivée.

23J Énoncer et démontrer le théorème sur la limite de la dérivée. Quelle différence avec le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$?

Fonctions "mieux que dérivables"

25A Définir ce qu'est une fonction $\mathcal{D}^n$, une fonction $\mathcal{C}^n$.

25B Rappeler avec démonstration la formule de Leibniz.

25C Donner sans démonstration le théorème de prolongement $\mathcal{C}^k$.

25D Donner sans démonstration les trois formules de Taylor.

25E Certaines formules de Taylor sont **globales** et d'autres **locales** : les identifier et **expliquer ce que cela veut dire**.

25F Expliquer comment les DL peuvent aider à déterminer les asymptotes obliques d'une courbe et les positions relatives locales de la courbe à ces asymptotes.

Programme de khôlle

de la semaine du 22/03/2021

(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Espaces et sous-espaces vectoriels + Familles dans les espaces vectoriels..

Reprise du programme précédent :

1. Espace vectoriel (ev) : définition. Le produit de n evs est naturellement muni d'une structure d'ev.
2. Sous-espace vectoriel (sev) : définitions équivalentes. Structure d'ev. L'intersection d'une famille de sevs est un sev.
3. Somme de n sevs. Cas des sommes directes. Sevs suppémentaires.
4. Espace vectoriel engendré par une partie : définitions équivalentes, propriétés immédiates.
5. Familles finies ou infinies dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Sous-familles. Combinaisons linéaires des vecteurs d'une famille (finie ou infinie)
6. Familles libres, familles génératrices, bases. Application du déterminant de Vandermonde pour établir une liberté.
7. Base adaptée à une somme directe (de deux sevs, de n sevs). Application aux sous-espaces supplémentaires.

ATTENTION : TOUJOURS PAS D'APPLICATIONS LINÉAIRES, NI DE DIMENSION.

Dérivabilité + fonctions "mieux que dérivables".

Reprise du programme précédent :

1. Dérivabilité en un point : Définition du taux d'accroissement en un point, de la dérivée en un point. Dérivabilité à gauche, à droite. Tangentes. f **dérivable en a** $\Leftrightarrow$ f **a un** $DL_1(a)$**.**
2. Dérivabilité sur I : définition, exemples, contre-exemples. Espaces $\mathcal{D}^1(I,R)$ et $\mathcal{C}^1(I,R)$, opérations sur les fonctions dérivables et continûment dérivables, inclusions $\mathcal{C}^1(I,R) \subset \mathcal{D}^1(I,R) \subset \mathcal{C}^0(I,R)$. Exercice CCINP n° 4.
3. Théorèmes sur la dérivée des fonctions composées et sur la dérivée d'une fonction réciproque.
4. Rolle et accroissements finis : Lemme de Fermat (condition nécessaire d'extremum local pour f dérivable). Théorème de Rolle. Égalité des accroissement finis. Inégalité des accroissements finis. Reformulation à l'aide de la lipschitzianité.
5. Étude globale : Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction **sur un intervalle**. Plan d'étude d'une fonction. Interprétation géométrique de la croissance de la dérivée.
6. Dérivabilité et caractère $\mathcal{C}^1$: Fonctions $\mathcal{D}^1$ non $\mathcal{C}^1$. Fonctions $\mathcal{D}^0$ et théorème de Darboux (éclairant mais hors programme, donc non exigible des étudiants). Théorème sur la limite de la dérivé. Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.
7. Dérivées d'ordre supérieur : Dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une combinaison linéaire, d'un produit (formule de Leibniz), de $x \mapsto f(\alpha x+\beta)$. C'est l'occasion de réviser l'exercice CCINP $n^\circ 3$.
   Dérivées $n^{\text{ième}}$ de fonctions usuelles.
   Théorème de prolongement $\mathcal{C}^n$.
8. Formules de Taylor : Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange sous l'hypothèse $\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Application à des calculs de limites ou d'approximations. Formule de Taylor-Young sous l'hypothèse $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.
   L'ÉGALITÉ DE TAYLOR LAGRANGE EST EXPLICITEMENT HORS-PROGRAMME ☹.
9. Retour sur les développements limités : Définition. CNS d'existence à l'ordre 0 et à l'ordre 1. CS d'existence à l'ordre n (Taylor-Young). Unicité. Parité, imparité. C'est le moment de réviser ses développements limités usuels (V2) . Applications à des calculs de limites, d'équivalents simples, de développements asymptotiques, applications à des déterminations de positions relatives local d'une courbe avec ses tangentes ou avec ses asymptotes, application à la nature d'un point critique.

Dénombrements.

1. Rappels sur les cardinaux et les sommes : cf la fiche de synthèse en ligne.
2. Utilisation des bijections pour compter : préservation du cardinal par bijection.
   Rappel : nombre de p-uplets d'éléments d'un ensemble fini E de cardinal n.
   Définition et nombre de p-arrangements d'un ensemble fini E de cardinal n.
3. Utilisation de surjections pour compter : lemme des bergers.
   Énoncé du lemme des Bergers :
   (a) Pour compter le nombre de moutons, on compte les pattes et on divise par 4.
   (b) Si $E = \coprod_{i\in I} E_i$ et $\forall i \in I,\ |E_i| = d$ alors $|I| = \dfrac{|E|}{d}$.
   (c) Si l'application $f : E \to F$ est surjective et $\forall x \in F,\ \left|f^{-1}(\{x\})\right| = k$ alors $|F| = \dfrac{|E|}{k}$.
   Application au nombre de p-combinaisons d'un ensemble fini E de cardinal n.
4. Utilisation d'injections pour détecter : principe des tiroirs.
   Énoncé du principe des tiroirs :
   (a) Si on range n chaussettes dans $m < n$ tiroirs alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins 2 chaussettes.
   (b) Il n'existe pas d'injection d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal $m < n$.
   (c) Il n'existe pas de surjection d'un ensemble de cardinal m dans un ensemble de cardinal $n > m$.
   Applications.
5. Exercice CCP n°112.

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 29/03/2021

(Maths - MPSI)

LISTE DE QUESTIONS DE COURS **DONNÉES EXCLUSIVEMENT À TITRE INDICATIF**

MATHÉMATIQUES

Espaces et sous-espaces vectoriels + Familles dans les espaces vectoriels. :

22A Donner six exemples de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
22B Montrer qu'une intersection ou une somme de sevs est un sev.
22C Définir ce qu'est une somme de sevs, une somme directe, des sevs supplémentaires. Donner des exemples.
22D Définir ce qu'est un sous-espace vectoriel engendré (une seule version). Montrer que c'est un sev.
22E Montrer qu'on a $\mathrm{Vect}\,(F_1 \cup F_2) = F_1 + F_2$.
24A Définir ce qu'est une droite, un plan, un hyperplan (vectoriels). Donner des exemples.
24B Définir ce qu'est une famille libre, une famille liée, une famille génératrice, une base.
24C Montrer qu'une famille est une base si et seulement si elle est libre et génératrice.
24D Définir le déterminant de Vandermonde et donner son expression. À quoi peut-il servir dans ce chapitre ?
24E Montrer qu'une somme de droites est directe ssi leurs vecteurs directeurs forment une famille libre.

Dérivabilité + Fonctions "mieux que dérivables"

23A Définir ce qu'est une fonction dérivable et donner un exemple de fonction dérivable non $\mathcal{C}^1$.Le khôlleur pourrait, ou pas, demander une démonstration.
23B Montrer qu'une fonction est dérivable en a si et seulement si elle a un $DL_1(a)$.
23C Montrer qu'une fonction dérivable est continue.
23D Énoncer et démontrer le thèorème de dérivation des fonctions composées.
23E Énoncer et démontrer le thèorème de dérivation des fonctions réciproques.
23F Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.
23G Énoncer et démontrer l'égalité des accroissements finis.
23H Énoncer et démontrer l'inégalité des accroissements finis. Comment peut-on la reformuler ?
23I Énoncer et démontrer (un cas du) théorème sur le signe de la dérivée.
23J Énoncer et démontrer le théorème sur la limite de la dérivée. Quelle différence avec le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$?
25A Définir ce qu'est une fonction $\mathcal{D}^n$, une fonction $\mathcal{C}^n$.
25B Rappeler avec démonstration la formule de Leibniz.
25C Donner sans démonstration le théorème de prolongement $\mathcal{C}^k$.
25D Donner sans démonstration les trois formules de Taylor.
25E Certaines formules de Taylor sont **globales** et d'autres **locales** : les identifier et **expliquer ce que cela veut dire**.
25F Expliquer comment les DL peuvent aider à déterminer les asymptotes obliques d'une courbe et les positions relatives locales de la courbe à ces asymptotes.

Dénombrements.

26A Énoncer le lemme des bergers.
26B Énoncer le principe des tiroirs.
26C Pour E un ensemble de cardinal n, définir : p-arrangement de E. Combien y en a-t-il ? Démontrer.
26D Pour E un ensemble de cardinal n, définir : k-combinaison de E. Combien y en a-t-il ? Démontrer.

Programme de khôlle

de la semaine du 05/04/2021

(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Dénombrements.

Éventuellement : reprise du programme précédent. Pour rappel :

1. Rappels sur les cardinaux et les sommes : cf la fiche de synthèse en ligne.
2. Utilisation des bijections pour compter : préservation du cardinal par bijection.
   Rappel : nombre de p-uplets d'éléments d'un ensemble fini E de cardinal n.
   Définition et nombre de p-arrangements d'un ensemble fini E de cardinal n.
3. Utilisation de surjections pour compter : lemme des bergers.
   Énoncé du lemme des Bergers :
   (a) Pour compter le nombre de moutons, on compte les pattes et on divise par 4.
   (b) Si $E = \coprod_{i \in I} E_i$ et $\forall i \in I,\ |E_i| = d$ alors $|I| = \dfrac{|E|}{d}$.
   (c) Si l'application $f : E \to F$ est surjective et $\forall x \in F,\ \left|f^{-1}(\{x\})\right| = k$ alors $|F| = \dfrac{|E|}{k}$.
   Application au nombre de p-combinaisons d'un ensemble fini E de cardinal n.
4. Utilisation d'injections pour détecter : principe des tiroirs.
   Énoncé du principe des tiroirs :
   (a) Si on range n chaussettes dans $m < n$ tiroirs alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins 2 chaussettes.
   (b) Il n'existe pas d'injection d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal $m < n$.
   (c) Il n'existe pas de surjection d'un ensemble de cardinal m dans un ensemble de cardinal $n > m$.
   Applications.
5. Exercice CCP n°112.

Familles en dimension finie.

1. Espace vectoriel de dimension finie :
   - Définition (par l'existence d'une famille génératrice finie).
   - Existence de bases : Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète. Caractérisation des bases comme les sous-familles libres maximales ou les sous-familles génératrices minimales d'une famille génératrice donnée.
   - Dimension : Unicité du cardinal d'une base et définition de la dimension. Exemples d'ev de dimension finie classiques.
     Isomorphisme $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^n \\ v & \mapsto & \left.v\right|_{\mathcal{B}} \end{array}\right.$ de décomposition dans une base.
2. Propriétés des familles en dimension finie :
   - Applications du TBE et du TBI : Majoration du cardinal d'une famille libre, minoration du cardinal d'une famille génératrice. Exemples d'espaces vectoriels de dimension infinie. Une famille de $n = \dim(E)$ vecteurs est libre ssi elle est génératrice ssi c'est une base. Exemple des familles de polynômes échelonnés en degré.
   - Rang d'une famille : Définition. Lien avec le rang (par colonnes) d'une matrice et méthode de calcul.
3. Applications :
   - Suites récurrentes linéaires doubles.
   - Polynômes de Lagrange.
4. Exercices CCP n° 55 et n° 87 : pour le 87, la question 2 doit être traitée pendant (ou avant) la question 1.

Attention : Toujours pas d'applications linéaires (en particulier dans la résolution de l'exercice CCINP 87 où il devient nécessaire de traiter la question 2 pendant (ou avant) la question 1). Toujours pas de Grassmann.

Séries : le début

1. Définitions et propriétés immédiates :
   a. Séries. Sommes partielles. Lien suites/séries.
   b. Convergence, divergence, nature. Somme (finie ou infinie) d'une série. Suite des restes d'une série convergente.
   c. Divergence grossière.
   d. Linéarité de la somme.
   e. Séries géométriques.
2. Séries à termes positifs (STP).
   a. Propriété fondamentale (toutes les STP ont une somme et convergent ssi elles sont bornées).
   b. Principe de comparaison pour des séries à termes positifs. Variantes avec o, O, $\sim$.
   c. Comparaison série-intégrale dans le cas monotone : encadrement des sommes partielles. Séries de Riemann.
3. Rappel : l'inégalité de Taylor-Lagrange permet de déterminer la somme de certaines séries, et reste une technique à connaître.

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 05/04/2021

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours **données exclusivement à titre indicatif**

Mathématiques

Dénombrements.

26A Énoncer le lemme des bergers.

26B Énoncer le principe des tiroirs.

26C Pour E un ensemble de cardinal n, définir : p-arrangement de E. Combien y en a-t-il ? Démontrer.

26D Pour E un ensemble de cardinal n, définir : k-combinaison de E. Combien y en a-t-il ? Démontrer.

Familles en dimension finie.

27A Énoncer le théorème de la base extraite (les deux points).

27B Énoncer le théorème de la base incomplète.

27C Donner trois evs de dimension finie et trois evs de dimension infinie. Une examinatrice ou un examinateur pourrait demander une démonstration.

27D Définir le rang d'une famille de vecteurs et expliquer comment on peut le calculer.

27E Définir la base de Lagrange et les polynômes d'interpolation de Lagrange. À quoi ça sert ?

27F Expliquer comment on détermine l'expression en fonction de n du terme général d'une suite donnée par ses deux premiers termes et une relation de récurrence de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Séries

28A Définir la divergence grossière d'une série et montrer que la divergence grossière implique la divergence.

28B Donner une CNS de convergence des séries géométriques et une CNS de convergence des séries de Riemann.
Un examinateur ou une examinatrice pourrait demander une démonstration.

28C Énoncer la propriété fondamentale sur les STP. Quel théorème sur les suites reformule-t-elle ?

28D Énoncer sa version préférée du principe de comparaison pour les STP.
Un examinateur ou une examinatrice pourrait demander une démonstration, y compris d'une autre version.

28E Énoncer le théorème de comparaison série-intégrale.

25D Donner sans démonstration l'inégalité de Taylor-Lagrange. Quand permet-elle de déterminer la nature/somme d'une série ?

Programme de khôlle

de la semaine du 26/04/2021

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Séries

1. Définitions et propriétés immédiates :
   a. Séries. Sommes partielles. Lien suites/séries.
   b. Convergence, divergence, nature. Somme (finie ou infinie) d'une série. Suite des restes d'une série convergente.
   c. Divergence grossière.
   d. Linéarité de la somme.
   e. Séries géométriques.
2. Séries à termes positifs (STP).
   a. Propriété fondamentale (toutes les STP ont une somme et convergent ssi elles sont bornées).
   b. Principe de comparaison pour des séries à termes positifs. Variantes avec o, O, $\sim$.
   c. Comparaison série-intégrale dans le cas monotone : encadrement des sommes partielles. Séries de Riemann.
3. Étude d'une série à termes complexes ou réels.
   a. Définition de l'absolue convergence. L'absolue convergence implique la convergence. Le corollaire sur lequel le programme choisit d'insister : « si $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ vérifient $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge ».
   b. Règle de d'Alembert pour les séries absolument convergentes. Série exponentielle.
   c. Théorème spécial sur les séries alternées.
   d. Plan d'étude d'une série à termes complexes ou réels. Cf la synthèse sur l'étude de la nature d'une série.
4. Applications des séries : théorème du point fixe de Picard, formule de Stirling.
5. Exercices CCP : n° 5, n° 6, n° 7, n° 39 question 1, n° 8 (sauf la question 2.(b)), n° 46.
6. Rappel : l'inégalité de Taylor-Lagrange permet de déterminer la somme de certaines séries, et reste une technique à connaître.

Sous-espaces en dimension finie.

1. Contexte : propriété fondamentale sur les sous-espaces en dimension finie (ils sont de dimension inférieure à $\dim(E)$ avec égalité si et seulement si $F = E$). Applications immédiates : existence d'un supplémentaire en dimension fini et unicité de la dimension d'un supplémentaire en dimension finie ; caractérisation des hyperplans en dimension finie.
2. Formule de Grassmann et applications : formule de Grassmann, caractérisation des sommes directes en dimension finie, dimension d'une somme de m sous-espaces, intersection d'hyperplans et application aux systèmes linéaires.

Toujours pas d'applications linéaires cette semaine).

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaitent poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine du 26/04/2021

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours **données exclusivement à titre indicatif**

Mathématiques

Séries

28A Définir la divergence grossière d'une série et montrer que la divergence grossière implique la divergence.

28B Donner une CNS de convergence des séries géométriques et une CNS de convergence des séries de Riemann. Un examinateur ou une examinatrice pourrait demander une démonstration.

28C Énoncer et démontrer la propriété fondamentale sur les STP.

28D Énoncer sa version préférée du principe de comparaison pour les STP. Un examinateur ou une examinatrice pourrait demander une démonstration, y compris d'une autre version.

28E Énoncer le théorème de comparaison série-intégrale.

28F Définir la convergence absolue d'une série et montrer que la convergence absolue implique la convergence.

28H Donner la règle de d'Alembert. Un examinateur ou une examinatrice pourrait demander une démonstration.

28I Définir la série exponentielle et montrer sa convergence. Un examinateur ou une examinatrice pourrait demander une démonstration que la somme est bien l'exponentielle dans le cas réel.

28J Donner le théorème spécial sur les séries alternées. Un examinateur ou une examinatrice pourrait demander une démonstration.

25D Donner sans démonstration l'inégalité de Taylor-Lagrange. Quand permet-elle de déterminer la nature/somme d'une série ?

Sous-espaces en dimension finie.

29A Si $\dim(E) = n$ et F est un sev de E, que dire de $\dim(F)$?

29B Montrer qu'en dimension finie, tout sev a un supplémentaire. Que dire de la dimension d'un supplémentaire ?

29C Énoncer la formule de Grassmann.

29D Comment peut-on, en dimension finie, montrer que deux sevs sont supplémentaires ?

Programme de khôlle

de la semaine du 03/05/2021

(Maths - MPSI)

Mathématiques

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$).

1. Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$: Définition. Égalité dans $\mathbb{K}[X]$.
   Structure d'algèbre : Addition. Multiplications. Base canonique. Sous-espaces vectoriels remarquables.
2. Fonctions polynomiales sur une $\mathbb{K}$-algèbre : Définition. Isomorphisme d'algèbre entre polynômes et fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}$. Composition des polynômes.
3. Polynôme dérivé : Linéarité de la dérivation. Formule de Leibniz. Formule de Taylor pour les polynômes.
4. Degré : Définition. Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée. Espaces vectoriels $\mathbb{K}_n[X]$. Division euclidienne, reformulation en terme de somme directe.
5. Racines : Définition. Multiplicité d'une racine (définitions équivalentes). Majoration du nombre de racines.
   Polynômes scindés. Relations coefficients-racines. Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels.
   Théorème de d'Alembert-Gauss (rappel).
6. Formule d'interpolation de Lagrange (rappel).
7. Exercice CCINP n° 85.

Espaces vectoriels

Éventuellement : reprise des quatre chapitres correspondant (espaces et sous-espaces vectoriels, familles dans les espaces vectoriels, familles en dimension finie, sous-espaces en dimension finie).

Applications linéaires : le début

1. Définition. Exemples fondamentaux. Terminologie élémentaire (endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire).
2. Opérations : (Co)restriction d'une application linéaire. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$. Composition des applications linéaires, anneau et algèbre $\mathcal{L}(E)$. Réciproque d'une application linéaire, groupe $GL(E)$. Un isomorphisme préserve la dimension. Reprise de l'exercice CCINP $n°$ 55.
3. Encore un exercice CCINP : le 65 (reformulé). Se référer de préférence à la version adaptée pour l'énoncé.

Rien d'autre cette semaine !

- **pas de propriété fondamentale des applications linéaires et encore moins de matrice d'une AL ;**
- **pas de résultat spécifique sur les applications linéaire en dimension finie ;**
- **pas d'image, pas de noyau, pas de rang ;**
- **aucun résultat sur les projections, les symétries ou les endomorphismes nilpotents.**

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la semaine du 03/05/2021

(Maths - MPSI)

Liste de questions de cours **données exclusivement à titre indicatif**

Mathématiques

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$).

30A $\mathbb{K}[X]$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre. Expliquer ce que cela veut dire.

30B Donner les quatre formules des degrés.

30C Donner et démontrer la formule de Taylor spécifique pour les polynômes.

30D Qu'est-ce qu'une racine ? Une racine de multiplicité m ? Comment montre-t-on l'équivalence entre ces définitions ?

30E Définir les fonctions symétriques élémentaires et donner les relations coefficients-racines.

30F Énoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

30G Expliquer ce que signifie être invariant par extension de corps et dire ce qui l'est.

30H Énoncer le théorème de Bézout et le lemme de Gauss dans $\mathbb{K}[X]$.

30I Quels sont les irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ?

Généralités sur les applications linéaires

31A Donner trois méthodes possibles pour montrer qu'une application est linéaire.

31B Définir : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire. Donner un exemple de chaque type.

Programme de khôlle

de la "semaine" du 10/05/2021 au 21/05/2021

(Maths - MPSI)

ATTENTION : "SEMAINE" ÉCHELONNÉE SUR 14 JOURS (À CAUSE DU PONT DE L'ASCENSION).

MATHÉMATIQUES

Applications linéaires

1. Définition. Exemples fondamentaux. Terminologie élémentaire (endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire).
2. Opérations : (Co)restriction d'une application linéaire. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$. Composition des applications linéaires, anneau et algèbre $\mathcal{L}(E)$. Réciproque d'une application linéaire, groupe $GL(E)$. Un isomorphisme préserve la dimension. Reprise de l'exercice CCINP $n°$ 55.
3. Propriété fondamentale sur les applications linéaires : toute application linéaire est entièrement et uniquement déterminée par ses valeurs (arbitraires) sur une base.
   Cas des application linéaires f de $\mathbb{K}^q$ dans $\mathbb{K}^p$: elles sont toutes de la forme $x \mapsto Ax$ avec $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, appellée matrice canoniquement associée à f (les élèves doivent savoir déterminer A).
   Propriété fondamentale généralisée : toute application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions (linéaires) sur les termes d'une somme directe.
4. Image et noyau : Définition, lien avec la surjectivité et l'injectivité, structure de sev.
   Exercice classique : images et noyaux itérés.
   Caractérisation des hyperplans comme noyaux des formes linéaires non nulles. Équation d'un hyperplan.
   Théorème d'isomorphisme.
5. Rang d'un endomorphisme. Propriétés immédiates du rang. Lien avec le rang d'une famille (le rang d'une application linéaire est le rang de l'image d'une base par cette application linéaire).
6. Applications linéaires en dimension finie. Théorème du rang. Caractérisation de l'{in/sur/bi}jectivité par le rang. Caractérisation des isomorphismes. Applications. Reprise de l'exercice CCP $n°$ 87.
7. Endomorphismes remarquables : projections ; symétries ; endomorphismes nilpotents (rien sur leurs matrices).
8. Encore des CCINP : 60, 62 sauf 2.(a), 64, 65 reformulé, 90. Se référer de préférence à la version adaptée pour l'énoncé.

Important : la notion de matrice d'une application linéaire d'une base dans une autre n'a pas encore été vue, le seul lien connu avec les matrices à ce stade porte sur les applications linéaires de $\mathbb{K}^q$ dans $\mathbb{K}^p$ (cf plus haut).

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme précédent Programme suivant

Programme de khôlle

de la "semaine" du 10/05 au 21/05/2021

(Maths - MPSI)

LISTE DE QUESTIONS DE COURS **DONNÉES EXCLUSIVEMENT À TITRE INDICATIF**

MATHÉMATIQUES

Applications linéaires

31A Donner trois méthodes possibles pour montrer qu'une application est linéaire.

31B Définir : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire. Donner un exemple de chaque type.

31C Énoncer la propriété fondamentale sur les applications linéaires.

31D Montrer que l'image et le noyau d'une application linéaire sont des sevs.

31E Montrer une des deux inclusions de l'énoncé liant hyperplans et formes linéaires non nulles.

31F Énoncer et démontrer le théorème d'isomorphisme.

31G Définir le rang d'une application linéaire et expliquer pourquoi ça s'appelle comme ça.

31H Énoncer et démontrer le théorème du rang.

31I Énoncer et démontrer le théorème de caractérisation des isomorphismes en dimension finie.

31J Montrer qu'un endomorphisme est une projection si et seulement si c'est un endomorphisme idempotent.

31K Montrer qu'un endomorphisme est une symétrie si et seulement si c'est un endomorphisme involutif.

Programme de khôlle

de la semaine du 25/05/2021

(Maths - MPSI)

Attention : les colles du lundi 24/05 (pentecôte) doivent êtres reportées.

Mathématiques

Applications linéaires

Reprise du programme précédent.

Corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles.

1. Fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$: Définition. Égalité dans $\mathbb{K}(X)$. Addition. Multiplication. Composition. Dérivation.
2. Degré : Définition. Degré d'une somme, d'un produit, d'un quotient. Attention au cas "piégeux" du degré d'une dérivée !
3. Zéros (ou racines) et pôles : définition. Multiplicité.
4. Fonctions rationnelles : Définition. Préservation de la somme, du produit, de la composition, de la dérivation.
5. **Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$** : Partie entière (ou polynomiale) d'une fraction rationnelle. Partie polaire associée à un pôle α. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$. Rappel des méthodes de calcul.
6. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$.

Matrices d'une application linéaire, changements de bases.

1. Matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ d'une base $\mathcal{B}_E$ de E dans une base $\mathcal{B}_F$ de F, notée $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E} f$.
   Cas des endomorphismes.
   Isomorphismes structurels. Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$. Préservation du rang.
2. Matrice de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_1$ (celle qui permet de passer de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$!), notée $P_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ ou $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} id$. Formule de changement de base pour un vecteur, pour une matrice.
   Applications calculatoires (notamment pour des calculs de puissances).
3. Encore des CCINP : 59, 72, 73, 88 (reformulés), 71. Se référer de préférence à la version adaptée pour l'énoncé.

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme de khôlle

de la semaine au 25/05/2021

(Maths - MPSI)

LISTE DE QUESTIONS DE COURS **DONNÉES EXCLUSIVEMENT À TITRE INDICATIF**

MATHÉMATIQUES

Applications linéaires

31A Donner trois méthodes possibles pour montrer qu'une application est linéaire.

31B Définir : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire. Donner un exemple de chaque type.

31C Énoncer la propriété fondamentale sur les applications linéaires.

31D Montrer que l'image et le noyau d'une application linéaire sont des sevs.

31E Montrer une des deux inclusions de l'énoncé liant hyperplans et formes linéaires non nulles.

31F Énoncer et démontrer le théorème d'isomorphisme.

31G Définir le rang d'une application linéaire et expliquer pourquoi ça s'appelle comme ça.

31H Énoncer et démontrer le théorème du rang.

31I Énoncer et démontrer le théorème de caractérisation des isomorphismes en dimension finie.

31J Montrer qu'un endomorphisme est une projection si et seulement si c'est un endomorphisme idempotent.

31K Montrer qu'un endomorphisme est une symétrie si et seulement si c'est un endomorphisme involutif.

Fractions rationnelles.

32A Définir l'écriture irréductible d'une fraction rationnelle.

32B Définir le degré d'une fraction rationnelle.

32C Définir ce que sont les zéros et les pôles d'une fraction rationnelle ainsi que leur multiplicité.

32D Définir la partie entière (partie polynomiale) et les parties polaires d'une fraction rationnelle.

32E Quelle est la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$?

Matrices d'une application linéaire, changements de bases.

32A Montrer que $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'anneau, c'est-à-dire est bijective, linéaire, et préserve les produits (une examinatrice ou un examinateur ne demanderait sans doute qu'un seul des trois).

32B Qu'est-ce qu'une matrice de passage ? À quoi ça sert ?

32C Donner les formules de changement de base.

Programme de khôlle

de la semaine du 07/06/2021

(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Matrices d'une application linéaire, changements de bases, équivalence et similitude.

1. Matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ d'une base $\mathcal{B}_E$ de E dans une base $\mathcal{B}_F$ de F, notée $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E} f$.
   Cas des endomorphismes.
   Isomorphismes structurels. Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$. Préservation du rang.
2. Matrice de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_1$ (celle qui permet de passer de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$!), notée $P_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ ou $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} id$. Formule de changement de base pour un vecteur, pour une matrice.
   Applications calculatoires (notamment pour des calculs de puissances).
3. Matrices équivalentes : définition et interprétation en termes d'applications linéaires.
   Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
   Décomposition $PMQ = J_r$, une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.
4. Matrices semblables : définition et interprétation en termes d'endomorphismes. Invariance de la trace par changement de base. Trace d'un endomorphisme. Cas des projections.
5. Encore des CCINP : 59, 72, 73, 88 (reformulés), 71. Se référer de préférence à la version adaptée pour l'énoncé.

Par rapport à la semaine précédente : ajout de l'équivalence et de la similitude.

Espaces préhilbertiens.

1. Produit scalaire : définition, exemples usuels, produit scalaire canoniquement associé à une base. Normes euclidiennes : Cauchy-Schwarz, homogénéïté, séparation, inégalité triangulaire, identités de polarisation. Distances euclidiennes : symétrie, séparation, inégalité triangulaire.
2. Vecteurs orthogonaux : théorème de Pythagore, liberté d'une famille orthogonale formée de vecteurs non nuls. Sous-espaces vectoriels orthogonaux. Orthogonal $X^\perp$ d'une partie $X \subset E$: c'est toujours un sous-espace vectoriel de E et $Vect(\mathcal{F})^\perp = \mathcal{F}^\perp$. Orthogonal d'une droite. Théorème de la base orthonormée incomplête. Orthogonal d'un sev de dimension finie. Propriétés de $F \mapsto F^\perp$ si E est euclidien.
3. Bases orthonormées et projection : Décomposition en base orthonormée. Expression du produit scalaire et de la norme en base orthonormée. Projections et symétries orthogonales, expression du projeté de x sur F lorsqu'on connaît une base orthonormée de F. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie. Distance à un hyperplan vectoriel lorsque E est euclidien.

4. Exercices CCP : 39 (sans la question 2), 76, 77, 79, 80, 81, 82, 92. Oui, il y a de quoi faire, c'est open bar.

Pas de produit mixte, pas d'automorphismes orthogonaux.

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les kholleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôlleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaient poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.

Programme précédent
Programme suivant