#KHMS10QE#

10 A $(\mathbb{Z}, +, \times, \leqslant)$ forme un anneau commutatif ordonné ssi :

- ~~$\leqslant$ est un ordre total sur $\mathbb{Z}$~~
- $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif :
  - $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien :
    - $+$ est commutatif sur $\mathbb{Z}$
    - $+$ possède un elt neutre : 0
    - Tout elt a dans $\mathbb{Z}$ possède un symétrique par $+$: $-a$
    - $+$ est associative
  - $\times$ est distributif sur $+$
  - $\times$ est associatif
  - $\times$ est commutatif
  - $\times$ possède un elt neutre : 1
- on peut additionner des inégalités
- on peut multiplier des inégalités par un positif

$(A, +_A, \times_A, \leqslant_A)$ anneau ordonné : on peut $\begin{cases} +_A \\ \times_A \text{ par positif} \end{cases}$ des inégalités ; $(A, +_A, \times_A)$ anneau

$(A, +_A, \times_A)$ anneau : $\times_A$ est associatif et $\times_A$ possède un elt neutre

et $\times_A$ distrib sur $+_A$

et $(A, +_A)$ groupe <u>abélien</u> (i.e groupe commutatif)

$(A, +_A)$ groupe :

$+_A$ est $\boxed{A}$

$+_A$ a un elt neutre

$\forall$ les A ont un sym par $+_A$

10 B $|$ est stable par combinaison linéaire :

Soient $a, b, c, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ Supposons $\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases}$. Mq $a | \lambda b + \mu c$

Alors $\begin{cases} \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \lambda b = \lambda k a \\ \text{il existe } k' \in \mathbb{Z} \text{ tq } \mu c = \mu k' a \end{cases}$

$\lambda b + \mu c = a(\lambda k + \mu k')$

Posons $K = \lambda k + \mu k'$

$\lambda b + \mu c = aK$ or $K \in \mathbb{Z}$

donc $a | \lambda b + \mu c$

$|$ est stable par produit :

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ Supposons $\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases}$. Mq $a \cdot c | bd$

On a $\begin{cases} \text{il existe } k \in \mathbb{Z}, \ ak = b \\ \text{il existe } k' \in \mathbb{Z}, \ ck' = d \end{cases}$

On a $b \cdot d = (a \cdot k) \cdot (c \cdot k')$

$= a \ k \cdot c \cdot k'$ par associativité de $\times$ dans $(\mathbb{Z}, +, \times, \lambda)$

$= k \cdot k' \cdot a \cdot c$ par commutativité de $\times$ dans $(\mathbb{Z}, +, \times, \lambda)$

or $k \cdot k' \in \mathbb{Z}$ donc $ac | bd$

$|$ est stable par puissances : Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons a/b

ainsi $ak = b$

ainsi $a^n k^n = b^n$

or $k^n \in \mathbb{Z}$

donc a^n / b^n