

Programme de khôlle
de la semaine du 07/06/2021
(Maths - MPSI)

MATHÉMATIQUES

Matrices d'une application linéaire, changements de bases, équivalence et similitude.

1. Matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ d'une base \mathcal{B}_E de E dans une base \mathcal{B}_F de F , notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E} f$.
Cas des endomorphismes.
Isomorphismes structuraux. Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$. Préservation du rang.
2. Matrice de passage de la base \mathcal{B}_2 à la base \mathcal{B}_1 (celle qui permet de passer de la base \mathcal{B}_1 à la base \mathcal{B}_2 !), notée $P_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ ou $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} id$. Formule de changement de base pour un vecteur, pour une matrice.
Applications calculatoires (notamment pour des calculs de puissances).
3. Matrices équivalentes : définition et interprétation en termes d'applications linéaires.
Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
Décomposition $PMQ = J_r$, une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r .
4. Matrices semblables : définition et interprétation en termes d'endomorphismes. Invariance de la trace par changement de base. Trace d'un endomorphisme. Cas des projections.
5. Encore des CCINP : 59, 72, 73, 88 (reformulés), 71. Se référer de préférence à la version adaptée pour l'énoncé.

Par rapport à la semaine précédente : ajout de l'équivalence et de la similitude.

Espaces préhilbertiens.

1. Produit scalaire : définition, exemples usuels, produit scalaire canoniquement associé à une base. Normes euclidiennes : Cauchy-Schwarz, homogénéité, séparation, inégalité triangulaire, identités de polarisation. Distances euclidiennes : symétrie, séparation, inégalité triangulaire.
2. Vecteurs orthogonaux : théorème de Pythagore, liberté d'une famille orthogonale formée de vecteurs non nuls. Sous-espaces vectoriels orthogonaux. Orthogonal X^\perp d'une partie $X \subset E$: c'est toujours un sous-espace vectoriel de E et $\text{Vect}(\mathcal{F})^\perp = \mathcal{F}^\perp$. Orthogonal d'une droite. Théorème de la base orthonormée incomplète. Orthogonal d'un sev de dimension finie. Propriétés de $F \mapsto F^\perp$ si E est euclidien.
3. Bases orthonormées et projection : Décomposition en base orthonormée. Expression du produit scalaire et de la norme en base orthonormée. Projections et symétries orthogonales, expression du projeté de x sur F lorsqu'on connaît une base orthonormée de F . Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie. Distance à un hyperplan vectoriel lorsque E est euclidien.
4. Exercices CCP : 39 (sans la question 2), 76, 77, 79, 80, 81, 82, 92. Oui, il y a de quoi faire, c'est open bar.

Pas de produit mixte, pas d'automorphismes orthogonaux.

Remarques :

- Désormais, les questions de cours sont exclusivement données à titre indicatif. Les khôleurs peuvent décider ou pas de poser une question de cours. De plus, **les khôleurs sont légitimes pour inventer leurs propres questions de cours** sans se limiter à la liste suggérée, s'ils souhaitent poser une question de cours. **Il sont souverains pour déterminer si un élève a, ou pas, appris son cours.**
- Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne sachant pas son cours.