##KHMS9Q##

ok

8A Soient $\begin{cases} P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdot \cdot + a_1 X + a_0 \\ Q(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0 \end{cases}$

facto par X^{n-m}

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{a_n X^n + \cdot \cdot + a_0}{b_m X^m + \cdots + b_0} = X^{n-m} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{X} + \cdots + \frac{a_0}{X^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{X} + \cdots + \frac{b_0}{X^m}}$$

$$\xrightarrow[X \to \infty]{} \begin{cases} sg\left(\frac{a_n}{b_m}\right)\infty & \text{si } n-m>0 \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n-m=0 \\ 0 & \text{si } n-m<0 \end{cases}$$

ok

8B $ch = \frac{e^{id} + e^{-id}}{2}$; $sh = \frac{e^{id} - e^{-id}}{2}$; $th = \frac{sh}{ch}$

$ch, sh \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ comme combinaisons linéaires de exp

$th \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, ch\, x = 0\}, \mathbb{R})$ comme quotient de fonctions dérivables

$\in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car $\{x \in \mathbb{R}, ch\, x = 0\} = \emptyset$

On a $ch' = \left(\frac{e^{id} + e^{-id}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(\exp)' + \frac{1}{2}(e^{-id})'$

$$= \frac{1}{2}\exp - \frac{1}{2}e^{-id}$$

$$= sh$$

$sh' = \left(\frac{e^{id} - e^{-id}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\exp' - \frac{1}{2}(e^{-id})'$

$$= \frac{1}{2}\exp + \frac{1}{2}e^{-id}$$

$$= ch$$

$$th' = \left(\frac{sh}{ch}\right)' = \frac{sh'ch - ch'sh}{ch^2} = \frac{ch^2 - sh^2}{ch^2} = 1 - th^2$$

8C Sur $\mathbb{R}_+^*$:

prérequis !

$$0 \leqslant \frac{\ln}{\mathrm{id}} \leqslant \frac{\sqrt{}}{\mathrm{id}} = \frac{1}{\sqrt{}}$$

encadrer par 0 et $\frac{\sqrt{}}{\mathrm{id}}$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant \lim_{+\infty} \frac{\ln}{\mathrm{id}} \leqslant \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{}}{\mathrm{id}}$$

par croissance de $\lim$.

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant \lim_{+\infty} \frac{\ln}{\mathrm{id}} \leqslant 0$$

D'après le TdG, $\frac{\ln}{\mathrm{id}} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

- - - - - -

Soit $t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$

poser $t = \frac{1}{x}$

$x \longrightarrow +\infty \Rightarrow t \longrightarrow 0^+$

$$x \ln x = \frac{\ln \frac{1}{t}}{t}$$

$$= -\frac{\ln t}{t}$$

utiliser $\lim_{+\infty} \frac{\ln}{\mathrm{id}}$

$$\xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow x \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

- - - - - - -

Soit $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t$

poser $t = e^x$

$x \longrightarrow +\infty \Rightarrow t \longrightarrow +\infty$

$$\begin{cases} \frac{e^x}{x} = \frac{t}{\ln t} = \frac{1}{\frac{\ln t}{t}} \\ \frac{\ln t}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \end{cases}$$

dire que c'est l'inverse de $\frac{\ln}{\mathrm{id}}$

utiliser $\lim_{+\infty} \frac{\ln}{\mathrm{id}}$

par quotients

$$\frac{t}{\ln t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty \Rightarrow \frac{\exp}{\mathrm{id}} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$$

ok

3B On a, sur $[0, \pi]$

$$\begin{cases} \cos \in \mathcal{D}([0,\pi], \mathbb{R}) \\ \cos \in \mathcal{C}([0,\pi], \mathbb{R}) \end{cases}$$

D'après le théorème de la bijection:

$$\begin{cases} \forall y \in [-1,1],\ \exists! x \in [0,\pi],\ \cos x = y \\ \forall x \in [0,\pi],\ \exists! y \in [-1,1],\ y = \cos x \end{cases}$$

On note cet "y" "arccos x"

ok

3C Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{-2\sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}$$

$$= -2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

Posons $H = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2H$.

$$\lim_{H\to 0} -\cancel{2}\sin(x+H)\frac{\sin H}{\cancel{2}H} = \lim_{H\to 0} -\sin(x+H)\frac{\sin H}{H}$$

or $\frac{\sin}{\mathrm{id}} \xrightarrow[0]{} 1$

et $H \to 0 \Rightarrow h \to 2\cdot 0 = 0$.

On a:

$$\cos'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{H\to 0} -\sin(x+h)\frac{\sin H}{H}$$

$$= -\sin(x)$$

OK

3E On a, sur $]0,\pi[$:

$$\begin{cases} \cos \text{ est bijective de réciproque } \cos^{-1} = \arccos \\ \cos \in \mathcal{D}(]0,\pi[,\mathbb{R}) \text{ et } \cos' = -\sin \\ -\sin \neq 0 \end{cases}$$

D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, arccos est dérivable de dérivée

$$(\arccos)' = \frac{1}{-\sin \circ \arccos} = \frac{-1}{\sin \circ \arccos}$$

or, d'après Pythagore :

$$\cos^2 + \sin^2 = x \mapsto 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 = 1 - \cos^2$$

$$\Leftrightarrow \sin = \sqrt{1-\cos^2} \quad \text{car } 1-\cos^2 \geq 0 \Leftarrow \begin{cases} \cos \in [-1,1]^{\mathbb{R}} \\ \forall x \in [-1,1]\, x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin \circ \arccos = \sqrt{1-\mathrm{id}^2}$$

donc

$$\arccos' = \frac{-1}{\sqrt{1-\mathrm{id}^2}}$$

OK

9A Soit $N \in \mathcal{P}(E)$.

$$\begin{cases} N \subset \mathbb{N} \\ N \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \max N \text{ existe}$$

9B $\forall a,b \in \mathbb{N}, \exists! (q,r) \in \mathbb{N}^2, a = bq + r \vee r < b$

Soit $a,b \in \mathbb{N}$.

<u>Unicité</u> Soient $(q_1,r_1),(q_2,r_2) \in \mathbb{N}^2$ et supposons $\begin{cases} a = b\, q_1 + r_1 \wedge r_1 < b, \\ a = bq_2 + r_2 \wedge r_2 < b \end{cases}$

Par soustraction, on a:) on soustrait les deux eq

$$a - a = bq_1 + r_1 - bq_2 - r_2 \quad \text{et} \quad -b < r_1 - r_2 < b$$

$$\Leftrightarrow b(q_1 - q_2) - (r_1 - r_2) = 0 \quad \text{et} \quad -b < r_1 - r_2 < b$$

$$\Leftrightarrow b(q_1 - q_2) = r_1 - r_2 \quad \text{et} \quad -b < r_1 - r_2 < b$$

$\underbrace{\Rightarrow}_{???}$ $r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$. En réinjectant: $b(q_1 - q_2) = 0$

$\Leftrightarrow q_1 - q_2 = 0$

$\Leftrightarrow q_1 = q_2$

<u>Existance</u> Notons $R = \{a - bq,\ q \in \mathbb{N},\ a - bq \geqslant 0\}$) ensemble des restes

$\begin{cases} R \subset \mathbb{N} \\ R \neq \emptyset \text{ car } a \in R \end{cases}$ d'ap. la propriété du bon ordre, $r = \min R$ existe.) ppt du bon ordre, $r = \min R$

Par déf. de R, $r = a - bq$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$) expr r en fn d'un q

$\Rightarrow a = bq + r$ expr a

Mq $r < b$. Procédons par l'absurde. Supposons $r \geqslant b$) $r<b$ par l'abs.

$r \geqslant b \Rightarrow a - bq \geqslant b$) rempl. par déf de r

$\Rightarrow a - b(q+1) \geqslant 0$) facto

$\Rightarrow \begin{cases} a - b(q+1) \in R \\ a - b(q+1) < a - bq = r = \min R \end{cases}$

imp

9Ca Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \supset(\mathbb{N},\mathbb{N})$. Alors mtq u est stationnaire
i.e. $\exists k\in\mathbb{N}, \forall q \geq k, u_q = u_k$

Posons $V = \{u_n, n\in\mathbb{N}\}$. On a $\begin{cases} V \subset \mathbb{N} \\ V \neq \emptyset \text{ car } u_{666} \in V \end{cases}$ Ensemble des vals de la suite
puis pp^té du bon o.
$\to a = \min A$

Notons $a = \min V$. Par définition : $\exists n_0 \in\mathbb{N}, a = u_{n_0}$. Soit $n_0 / a = u_{n_0}$
Noter idx de a $= u_{idx}$
Mtq $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$. Soit $n \geq n_0$.

$\begin{cases} u \in \supset(\mathbb{N},\mathbb{N}) \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \text{) trad.} \\ u_{n_0} = \min\{u_n, n\in\mathbb{N}\} = \min V \end{cases}$ $u\in\supset(\mathbb{N},\mathbb{N})$ $\Rightarrow u_n \geq u_{n_0}$. On a $\begin{cases} u_n \geq u_{n_0} \\ u_{n_0} \geq u_n \end{cases}$???

$\Rightarrow u_n = u_{n_0}$ par A de $\geq$ sur $\mathbb{N}$.

9Cb $\not\supset(\mathbb{N},\mathbb{N}) = \emptyset$.

Montrons-le par l'absurde. Supposons $\not\supset(\mathbb{N},\mathbb{N}) \neq \emptyset$.) absurde
Alors il existe $u \in \not\supset(\mathbb{N},\mathbb{N})$

donc $u \in \supset(\mathbb{N},\mathbb{N})$) $\not\supset(A,B) \subset \supset(A,B)$

donc u est stationnaire sur e.g. u_{n_0}) Utilisation de KHMS10Q9Ca

donc $u \in \not\supset(\mathbb{N},\mathbb{N}) \Rightarrow \underbrace{u_{n_0} > u_{n_0+1} = u_{n_0}}_{\text{def de stationnaire}}$

cqfd

Soit P un énoncé.

9D Mtq $\forall a_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in [\![a_0, +\infty[\![, \begin{cases} P(a_0) \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in [\![a_0, +\infty[\![, P(n)$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n \in [\![n_0, +\infty[\![$. Soit $\mathbb{B} = \{\top, \bot\}$ et $P \in \mathbb{B}^{[\![n_0, +\infty[\![}$

Supposons $\left\{\begin{array}{ll} P(n_0) & (\mathrm{I}) \\ \forall n \geqslant n_0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1). & (\mathrm{H}) \end{array}\right)$ 1. Supp (I) et (H)

2. Mt par l'absurde

Mtq $\forall n \in [\![n_0 + \infty[\![, P(n)$ par l'absurde. Supposons $\exists n \geqslant n_0, \neg P(n)$

$C = \{n \in [\![n_0, +\infty[\![, \neg P(n)\}$) 3. ensemble des "contradictions"

$\begin{cases} C \subset \mathbb{N} \\ C \neq \emptyset \end{cases}$ d'après la propriété du bon ordre, $n_c = \min C$ existe.) ppté du bon ordre $\to n_c$

Ainsi $\begin{cases} \forall n \in C, n \geqslant n_c \\ n_c \in C \end{cases} \Rightarrow n_c \geqslant n_0.$) déf. de $n_c = \min C$ Traitons deux cas.

déf de $\geqslant$: $>$ ou $=$

1er cas ($n_c = n_0$):

$\neg P(n_c)$

$\Rightarrow \neg P(n_0)$

imp (I)

2e cas ($n_c > n_0$):

$n_c > n_0 \Rightarrow n_c - 1 \in \mathbb{N}$ dcp écrire $P(n_c - 1)$ a un sens.

$\Rightarrow n_c - 1 < n_c = \min C$

$\Rightarrow n_c - 1 \notin C$ plus petit que min.

$\Rightarrow \neg(\neg(P(n_c - 1))$ trad de truc $\notin C$

$\Rightarrow P(n_c - 1)$

or, d'ap (H),

$P(n_c - 1) \Rightarrow P(n_c - 1 + 1) = P(n_c)$

imp car $n_c \in C \Rightarrow \neg P(n_c)$

Soit P un énoncé. On note $\mathbb{B} = \{\top, \bot\}$ $P \in \mathbb{B}^{\mathbb{N}}$

9E Mtq $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} P(0) \wedge P(1) \\ P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

Procédons par récurrence. 1. Rec sur $Q(n) = P(n) \wedge P(n+1)$

Soit $Q(n) = P(n) \wedge P(n+1)$. Supposons $\begin{cases} P(0) \wedge P(1). \\ P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2) \end{cases}$

<u>Initialisation</u> pour $n=0$.

$Q(0) = P(0) \wedge P(1) = \top$ par hypothèse

<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $Q(n)$. Montrons $Q(n+1)$.

On a $Q(n) \Leftrightarrow P(n) \wedge P(n+1)$) trad $Q(n)$

On $P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$ par hypothèse justif. hér pour avoir $P(n+2) = \top$

donc $P(n+1) \wedge P(n+2)$

donc $Q(n+1)$

<u>Conclusion</u>

9F Soit P un énoncé. Soit $\mathbb{B} = \{\top, \bot\}$.

Mtq $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\forall k \in [\![0, n[\![, P(k)) \Rightarrow P(n)$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $Q(n) = (\forall k \in [\![0, n[\![, P(k)) = P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \wedge P(n)$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ par récurrence (simple) rec. simple sur $Q(n)$

<u>Init</u> pour $n=0$

$Q(0) = (\forall k \in \varnothing, P(k)) = \top \Rightarrow P(0) = \top$???

<u>Hér</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ et supp $Q(n) = (\forall k \in [\![0, n[\![, P(k)) = (\forall k \in [\![0, n-1]\!], P(k))$

D'après l'hérédité forte on a $P(n+1)$) ???

donc $P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(n) \wedge P(n+1)$

donc $Q(n+1)$

<u>ccl</u> Q est initialisée et héréditaire, donc

$\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \in [\![0, n+1[\![, P(k)) \underset{0 \leq n+1 \Leftrightarrow 0 \leq n}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)) \Rightarrow P(n)$ cas particulier.

9G Mtq $\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \exists k \in \mathbb{P}, \cancel{n \mid k}\ k \mid n$ 1. Rec forte.

Procédons par récurrence forte. Soit $\underline{n} \in [\![2,+\infty[\![$ et supposons
$\forall k \in [\![2,n[\![, \exists p \in \mathbb{P}, p \mid k$

<u>Hérédité forte</u>

Traitons deux cas. 2. disj. $n \in \mathbb{P}$, $n \notin \mathbb{P}$.

<u>1^{er} cas</u> ($n \in \mathbb{P}$):
(Posons $p = n \in \mathbb{P}$)
$n \mid n$ et $n \in \mathbb{P}$.

<u>2^e cas</u> ($n \notin \mathbb{P}$):

Ainsi il existe $k, d \in [\![2,n[\![$ tel que $n = kd$) def de $n \mid k$

Par hdrf, k a un diviseur premier p) util. hdrf

On a $p \mid k \wedge k \mid n \Rightarrow p \mid n$ par Ⓣ de $\mid$ sur $\mathbb{N}$) Ⓣ de $\mid$ sur $\mathbb{N}$

La propriété est fortement héréditaire à partir du rang 2, elle est donc vraie pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$.

car $(\mathbb{N}, \mid)$ est un ordre tot xD

5α $\forall A,B \in \mathbb{K}[X],\ \exists!(Q,R)\in \mathbb{K}[X]^2,\ \begin{cases} A = BQ+R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$

5β Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\{\lambda_1, .., \lambda_r\}$ les racines de P.

"P est scindé à racines simples" $\Leftrightarrow \exists \mu\in\mathbb{K},\ P=\mu\prod_{k=0}^{r} X-\lambda_k$

"P est scindé" $\Leftrightarrow \exists(\mu, m_1, ,m_r)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}^r,\ P=\mu\prod_{k=0}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k}$

6α

6β Pour intégrer $\frac{P(X)}{Q(X)}$, on fait une DES puis on utilise la linéarité de $\int$ pour intégrer chaque élément simple.