Définitions

Suites. Suites à valeurs réelles.

Suite: $I^{\mathbb{N}}$ $\qquad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Opérations alg Struct

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

$(1)_{n\in\mathbb{N}}$ neutre pour $\times$

$(0)_{n\in\mathbb{N}}$ neutre pour $+$

Tout marche pareil c'est element-wise.

Ordres sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ Suites monotones, bornées, majo, mino.

Ordre partiel sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: comparer u_{n+1} à u_n $\forall n\in\mathbb{N}$.

bornée := majo $\wedge$ mino

bornée $\boxed{\times / +}$ bornée $\Rightarrow$ bornée

bornée APCR $\Rightarrow$ bornée

Définition de la limite: $\in\mathbb{R}$, $\pm\infty$, conv, divg, ! de lim.

$$\forall u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u\to l \iff \forall\varepsilon\in\mathbb{R},\ \overset{\text{ÀRP}}{\exists n_0\in\mathbb{N}},\ \forall n\geq n_0,\ \begin{cases} u_n\in\,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\ \wedge \varepsilon>0 \text{ si } l\in\mathbb{R} \\ u_n\in\,]\varepsilon, +\infty[\text{ si } l=+\infty \\ u_n\in\,]-\infty, \varepsilon[\text{ si } l=-\infty \end{cases}$$

lim est unique. Pf:

l_1	$< l_2$	ε: l_1	ε: l_2
$-\infty$	$\mathbb{R}$		1
$\mathbb{R}$	$+\infty$	1	$\lvert l_1\rvert+1$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{l_2-l_1}{2}$	$\frac{l_2-l_1}{2}$
$-\infty$	$+\infty$	-1	1

à la fin: $\underbrace{\text{truc} < u_n < \text{truc}}_{\text{le même}}$ imp conv: $\lim \in \mathbb{R}$

divg: $\neg$ conv

Critères de convergence divergence.

Toute suite convg est bornée

Pf

def lim $[\varepsilon = 1]$

$K := |\ell| + 1$

IT: $|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < K$

APCR $\Rightarrow$ ~~tout~~ court

TLM, version ÀPCR ($u \nearrow$ et u majo $\Rightarrow \lim u \in \mathbb{R}$)

Pf

def sup $[\varepsilon = \varepsilon]$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{croissance } u \Rightarrow & u_n \geq u_{n_0} > s - \varepsilon \\ s := \sup \Rightarrow & s + \varepsilon > s \geq u_n \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \in]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$$

TDG ($w \leq v \leq u$, $w, u \in \nearrow$ ou $\searrow$ $\Rightarrow v$ conv)

Pf

def lim (u, w) n

$n_0 := \max\{ \ldots \}$

$\hookrightarrow \ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon$

Adjacentes ($u \nearrow$, $v \searrow$, $u - v \to 0 \Rightarrow \lim u = \lim v$)

Pf

- $u < v \Leftarrow ((u-v)_n \nearrow$ & $\lim = 0 \Rightarrow \lim = \sup < 0)$
- u, v conv $\Leftarrow \left(\begin{cases} v \searrow \\ u \nearrow \text{ et majo } u : v_0 \text{ et } u \to \ell_1 = \sup u \end{cases} \right.$