familles dans les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Dans toute la feuille, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. *On a le droit d'utiliser les résultats vus en* TACMAS.

Liberté

Exercice 1. *Liberté dans* $\mathbb{R}^n$

1. La famille $\left(u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, u_3=\begin{pmatrix}a^2\\b^2\\c^2\end{pmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ?
2. Pour quelles valeurs du réel m la famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est-elle libre dans $\mathbb{R}^4$?
$u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}1\\m\\1\\0\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\m\\1\end{pmatrix},\quad u_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\m\end{pmatrix}.$
3. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^n$?

Exercice 2. *Liberté dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. La famille $\left((\lambda n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}_+^*}$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
2. La famille $\left((q^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{q\in\mathbb{R}_+^*}$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
3. La famille $\left((n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 3. *Liberté dans* $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

1. La famille $(\sin,\ \cos,\ \mathrm{ch},\ \mathrm{sh})$ est-elle libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$? Est-elle libre dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
2. La famille $(x\mapsto\sin(nx))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est-elle libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
3. La famille $\Big(x\mapsto|x-a|\Big)_{a\in\mathbb{R}}$ est-elle libre dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Exercice 4. *Liberté dans* E

On se donne une famille libre $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ d'un $\mathbb{K}-$ev E.

1. Montrer que la famille $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ est libre, où l'on pose $v_i=\sum\limits_{j\leqslant i}u_j$.
2. La famille $(w_1,w_2,\dots,w_n)$ est-elle libre, où $w_i=\sum\limits_{j\neq i}u_j$?

Des bases

Exercice 5. *Une base adaptée*

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a vu dans la feuille précédente qu'on a $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{K})=E$. Déterminer une base adaptée à cette somme directe.

Exercice 6. *Quelques bases*

1. Donner une base de l'espace des suites complexes stationnaires.
2. Justifier que $\left\{y\in\mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ y''-4y'+4y=0\right\}$ est un sev de $\mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en donner une base.

3. Donner[1] une base de $\mathbb{R}(X)$. *Indication : qu'exprime le théorème de décomposition en éléments simples ?*

Énoncé disponible à l'adresse suivante : http://mpsi.daudet.free.fr/.

N'hésitez pas à me poser *tout type de question sur un point qui ne vous paraît pas clair* par mail à l'adresse abbrug@gmail.com.

1. C'est plus facile avec $\mathbb{C}(X)$, mais on n'a pas encore vu le théorème de DES dans $\mathbb{C}(X)$.