EXM FAMSEV

$\boxed{2/1}$

$(\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{N}})_{\lambda \in \mathbb{R}_+^\times}$ est liée

Un exemple de CL nulle non triviale

$$-2\mathrm{id}_{\mathbb{N}} + 1(2\mathrm{id}_{\mathbb{N}}) = (0)_{n\in\mathbb{N}}$$

$(\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{N}})_{\lambda \in \mathbb{R}_+^\times}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\mathrm{Vect}(\lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{N}}) = \{\lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\ \lambda\in\mathbb{R}\}.$$
$$= \mathrm{Vect}\ \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$$

ex $(\exp \circ \mathrm{id}_{\mathbb{N}}) \notin \mathrm{Vect}\ \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$

Sinon il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad e^n = \lambda n$$

d'où

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{e^n}{n} = \lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty = \lambda$$

$\boxed{2/2}$ $(q^{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}})_{q\in\mathbb{R}_+^\times}$

Considérons une CL nulle $\alpha_1 q_1^{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}} + \alpha_2 q_2^{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}} + \dots + \alpha_r q_r^{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$

En particulier $\begin{cases} \alpha_1 + \dots + \alpha_r = 0 & (\text{car } q_1^{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}}(0) = 0) \\ \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_r q_r = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha_1 q_1^2 + \cdots + \alpha_r q_r^2 = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_1 q_1^{r-1} + \cdots + \alpha_r q_r^{r-1} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{r-1} & q_2^{r-1} & \cdots & q_r^{r-1} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M = \prod_{1 \leq i < j \leq r} q_j - q_i \neq 0$$

donc M^{-1} est définie.

En multipliant à gauche par M^{-1} :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$

Ainsi, toute CL nulle est triviale, d'où la liberté

Mais $\left(q^{\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}}\right)_{q \in \mathbb{R}_+^\times}$ n'est pas génératrice :

Montrons que $id \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas CL des $(q^{id_{\mathbb{N}}})_{q \in \mathbb{R}}$ par l'absurde.

Supposons avoir une CL de la forme :

$$\alpha_1 q_1^{id_{\mathbb{N}}} + \alpha_2 q_2^{id_{\mathbb{N}}} + \dots + \alpha_r q_r^{id_{\mathbb{N}}}$$

ÀRP, $q_1 < q_2 < \dots < q_n$

On divise par q_r^n

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_1 \left(\frac{q_1}{q_r}\right)^n + \dots + \alpha_{r-1}\left(\frac{q_{r-1}}{q_r}\right)^n + \alpha_r = \frac{n}{q_r^n}$$

$$n \longrightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \alpha_r = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{q_r^n} \\ \end{cases}$$

Or pour $q_r \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{q_r^n} = +\infty$ imp

donc $q_r > 1$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{q_1^r} = 0$ par CC

d'où $\alpha_r = 0$

On obtient de même de proche en proche

$$\alpha_r = \alpha_{r-1} = \alpha_{r-2} = \dots = 0$$

d'où $(0)_{n\in\mathbb{N}} = id_{\mathbb{N}}$. En particulier $(0)_{n\in\mathbb{N}}(7) = id_{\mathbb{N}}(7)$

$\iff 0 = 7$ imp

remq En remplaçant $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ par $(1)_n$, on obtient une autre preuve pour la liberté

$$\mathcal{T} := \left(e^{\lambda \mathrm{id}}\right)_{\lambda \in \mathbb{R}}$$

Considérons une CL nulle

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 \mathrm{id}} + \alpha_2 e^{\lambda_2 \mathrm{id}} + \cdots + e^{\lambda_n \mathrm{id}} = x \mapsto 0$$

En 0 : $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$

En 1 : $\alpha_1 e^{\lambda_1} + \alpha_2 e^{\lambda_2} + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n} = 0$

En 2 : $\alpha_1 e^{2\lambda_1} + \alpha_2 e^{2\lambda_2} + \cdots + \alpha_n e^{2 \cdot \lambda_n} = 0$

$\vdots$

En n-1 : $\alpha_1 e^{(n-1)\lambda_1} + \alpha_2 e^{(n-1)\lambda_2} + \cdots + \alpha_n e^{(n-1)\lambda_n} = 0$

Matriciellement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2} & \cdots & e^{\lambda_n} \\ (e^{\lambda_1})^2 & (e^{\lambda_2})^2 & \cdots & (e^{\lambda_n})^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e^{\lambda_1})^{n-1} & (e^{\lambda_2})^{n-1} & \cdots & (e^{\lambda_n})^{n-1} \end{pmatrix}}_{:= M} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M = \prod_{1 \leq i < j \leq n} e^{\lambda_j} - e^{\lambda_i} \neq 0 \quad \text{car } \exp \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

d'où M^{-1} définie, on multiplie à gauche par M^{-1} :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où toute CL nulle est triviale, d'où $\mathcal{T}$ est libre.

$\boxed{6/2}$

$$F := \left\{ y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ y'' - 4y' + 4y = 0 \right\}$$

Équation caractéristique :

$$X^2 - 4X + 4 = 0$$

$\Delta_{X^2-4X+4} = 16 - 16 = 0 \Rightarrow$ racine double. $r_0 := 2$

$$F = \left\{ (A\,\mathrm{id} + B)e^{2\,\mathrm{id}},\ \binom{A}{B} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \mathrm{id}\,e^{2\mathrm{id}},\ e^{2\mathrm{id}} \right\}$$

On a F un sev de $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car c'est un Vect.

Par définition, $\mathcal{F} = \left(e^{2\mathrm{id}},\ \mathrm{id}\,e^{2\mathrm{id}}\right)$ est une famille génératrice de F

$e^{2\mathrm{id}}$ et $\mathrm{id}\,e^{2\mathrm{id}}$ sont clairement non-colinéaires, donc $\mathcal{F}$ est libre.

On a $\begin{cases} \mathcal{F} \text{ libre} \\ \mathcal{F} \text{ génératrice de } F \end{cases}$

d'où $\mathcal{F}$ est une base de F

Une suite stationnaire est de la forme

$$(u_0, u_1, \dots, u_r, u_r, u_r, u_r, u_r, \dots\dots)$$

$$= u_0 (1, 0, 0, \dots) + u_1 (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$+ \dots$$

$$+ u_{r-1} (0, \dots, 1, \dots 0)$$

$$+ u_r (\underbrace{0, \dots,}_{r-1 \text{ fois}} 1, 1, 1, 1, \dots)$$

$$= u_0 (1, 0, \dots) + u_1 (0, 1, 0, \dots) + \dots + u_{r-1} (0, \dots, 1, 0, \dots)$$
$$+ u_r (1)_{n \in \mathbb{N}} - u_r (1, 0, \dots) - u_r (0, 1, 0, \dots) - \dots - u_r (0, \dots, 1, \dots 0)$$

$$= (u_0 - u_r)(1, 0, 0, \dots) + (u_1 - u_r)(0, 1, 0, \dots) + \dots + (u_{r-1} - u_r)(0, \dots, 1, \dots)$$
$$+ u_r (1)_{n \in \mathbb{N}}$$

Ainsi, une famille génératrice des suites stationnaires est

$$\left((1)_{n \in \mathbb{N}}, (1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots \right)$$

$$= \left((1)_{n \in \mathbb{N}} \right) \sqcup \left((\underbrace{\delta_{k,n}}_{n \text{ termes}})_{n \in \mathbb{N}} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

$$\delta_{k,n} := (0, \dots, \underbrace{1}_{\text{rang } k}, 0, \dots)$$

cerveau cosmique

Considérons une CL nulle de suite stationnaires

$$(0)_n = \alpha_{-1} (1)_{n \in \mathbb{N}} + \alpha_0 (\delta_{0,n}) + \alpha_1 (\delta_{1,n}) + \dots + \alpha_r (\delta_{r,n})$$

Pour $n=0$: $\alpha_{-1} + \alpha_0 = 0$

$n=1$: $\alpha_{-1} + \alpha_1 = 0$

$\vdots$

$n=r$: $\alpha_{-1} + \alpha_r = 0$

$n=r+1$: $\alpha_{-1} = 0$

D'où $\begin{cases} \alpha_0 = \alpha_{-1} \\ \alpha_1 = \alpha_{-1} \\ \vdots \\ \alpha_r = \alpha_{-1} \end{cases}$ et $\alpha_{-1} = 0$

d'où toute CL nulle est triviale

donc la famille est libre

ainsi c'est une base.

$\boxed{4/1}$

$$(\underbrace{u_1}_{v_1}, \underbrace{u_1+u_2}_{v_2}, \underbrace{u_1+u_2+u_3}_{v_3}, \dots, \underbrace{\sum_{k\leq n} u_k}_{v_n})$$

Considérons une CL nulle

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_E$$

ie $\alpha_1 u_1 + \alpha_2(u_1+u_2) + \dots + \alpha_n(u_1+u_2+\dots+u_n) = 0_E$

ie $$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0_{\mathbb{K}} \\ \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0_{\mathbb{K}} \\ \alpha_n = 0_{\mathbb{K}} \end{cases}$$

donc $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} = \dots = \alpha_1 = 0$

$\boxed{4/2}$

$$(w_1, \dots, w_n) = ((u_2+u_3+\dots+u_n), (u_1+u_3+\dots+u_n), \dots, (u_1+\dots+u_{n-1}))$$

Considérons une CL nulle $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n = 0_E$

ie $\alpha_1(u_2+u_3+\dots+u_n) + \dots + \alpha_n(u_1+\dots+u_{n-1}) = 0_E$

ie $u_1(\alpha_2+\dots+\alpha_n) + u_2(\alpha_1+\alpha_3+\dots+\alpha_n) + \dots + u_n(\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}) = 0_E$

Par liberté de $(u_1, \dots, u_n)$:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0 \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = 0 \end{cases}$$

En sommant les lignes

$$(n-1)\alpha_1 + \cdots + (n-1)\alpha_n = 0$$

$n \geqslant 2$ donc

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$$

Par soustraction

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

CL triviale. Donc famille libre