Familles remarquables d'un espace vectoriel

Remarque 1

Pas un sev par exemple : $\mathbb{R}_{=n}[X] \cup \{0\}$ car $X^n - 1 - X^n \notin \mathbb{R}_{=n}[X] \cup \{0\}$

Remarque 2

Pas un sev par exemple : $\mathbb{R}_{=n}[X] \cup \{0\}$ car $X^n - 1 - X^n \notin \mathbb{R}_{=n}[X] \cup \{0\}$

I Familles et combinaisons linéaires

I.1 Familles

Définition 1 : Rappel.

Une famille $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ est la donnée, pour tout élément i de l'ensemble d'indices I, d'un vecteur $v_i \in E$, i. e. une application $\mathcal{F} : I \to E$.

I.2 Sous-familles

Définition 2 : Sous-famille.

Soit $\mathcal{F}$ une famille. On appelle sous-famille de $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ une famille obtenue en « retirant certains vecteurs à $\mathcal{F}$ », c'est-à-dire une famille de la forme $(v_i)_{i \in J}$ avec $J \subset I$.

I.3 Combinaisons linéaires

Définition 3 : Rappel.

On appelle combinaison linéaire des vecteurs d'une famille $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ toute expression de la forme suivante : $\alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + \cdots + \alpha_r v_{i_r}$ où les α_k sont des scalaires et les i_k des éléments de I.

Remarque 3

Conséquence des deux identifications précédentes : une CL de $(v_1, \ldots, v_n)$ est toujours de la forme $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$.

Remarque 4

À toute partie $P \subset E$, on peut canoniquement associer une famille : la famille $(v)_{v \in P}$. On peut donc sans difficulté parler de CL des vecteurs d'une partie de E. On retrouve alors la notion vue dans le chapitre précédent. En particulier, on peut parler du sous-espace vectoriel engendré par une famille.

II Familles remarquables

II.1 Liberté

Définition 4 .

Étant donnée une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E, on appelle CL triviale des vecteurs de $\mathcal{F}$ la CL obtenue en prenant tous les α_k nuls. La CL triviale est nulle, au sens où elle s'évalue en 0_E, le vecteur nul de E. C'est une CL $(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k)$ où $\begin{cases} (\alpha_i) \in \mathbb{K} \\ (x_i) \in E \end{cases}$

Définition 5 : Liberté.

Une famille est dite libre lorsque sa seule CL nulle est la CL triviale. Dans le cas contraire, elle est dite liée.

Remarque 5

Pour tout $\begin{cases}(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{K}^k\\(x_1,\dots,x_k)\in E^k\end{cases}$ tels que $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_kx_k=0$ alors $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$

Pour montrer qu'une famille est liée $\exists(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ non tous nuls, $\exists(x_1,\dots,x_k)$ tel que

$$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_kx_k=0.$$

Remarque 6

Par définition, une sous-famille d'une famille libre est libre. En contraposant, on obtient que si $\mathcal{F}$ a une sous-famille liée, alors $\mathcal{F}$ est liée. Par contre, une sous-famille d'une famille liée peut très bien être libre.
Soient $(j_1,\dots,j_k)\in J$. Soient $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{K}^k$ et $(x_{j_1},\dots,x_{j_k})\in E^k$ tels que $\alpha_1,x_{j_1}+\cdots+\alpha_kx_{j_k}=0$.
On a $J\subset I$, donc $(j_1,\dots,j_k)\subset I$. Comme $(x_k)_{k\in I}$ est libre.
Donc $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$ Donc $(x_k)_{k\in J}$ est libre.
/!\ Une surfamille d'une famille liée est liée **mais** une sous-famille d'une famille liée peut être libre !
Par exemple, (e_1,e_2,e_3) est libre mais (e_1,e_2,e_2,e_1) est liée **Remarque 7**

La liberté est une notion intrinsèque, elle ne dépend pas de E.
Par exemple, la famille $\left(f_\lambda\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est aussi libre vue comme famille de vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Définition 6 .
On dit que deux vecteurs u et v de E sont colinéaires, et on note $u\mathbin{/\!/}v$, lorsqu'on a :
$\exists k\in\mathbb{K}, u=kv$ ou $\exists k\in\mathbb{K}, v=ku$.

Remarque 8

0. La famille $\emptyset$ est libre. $\mathbb{T}\ \mathbb{R}\ \mathbb{I}\ \mathbb{V}\ \mathbb{I}\ \mathbb{A}\ \mathbb{L}$
1. Pour $u\in E$, la famille (u) est libre si et seulement si on a $u\neq 0_E$.
2. Pour $(u,v)\in E^2$, la famille (u,v) est libre si et seulement si u et v sont non colinéaires.

II.2 Caractère générateur

Définition 7 .
Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est dite génératrice de E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire comme CL des vecteurs de $\mathcal{F}$.

Remarque 9

La notion de famille génératrice n'est pas une notion intrinsèque, elle dépend de E.
Plus précisément, « $\mathcal{F}$ est génératrice de E » peut se reformuler « $E=\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ ». En particulier, toute famille $\mathcal{F}$ est toujours génératrice d'un $\mathbb{K}$-ev : le $\mathbb{K}$-ev $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$! **Remarque 10**

Toute famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$

II.3 Bases

Définition 8 .
On dit d'une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de E que c'est une base de E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire de façon unique comme CL des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Proposition 1 : Reformulation de la définition.
Une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de E est une base si et seulement si elle est libre et génératrice de E.

Définition 9 : (informelle).
Lorsqu'un espace vectoriel E est livré en kit avec une base, c'est-à-dire lorsque les vecteurs de cet espace sont, par définition, des CL uniques des vecteurs d'une famille $\mathcal{C}$, cette famille est une base de E et on l'appelle la base canonique de E.

Remarque 11

$((1,0,\ldots,0,\ldots),(0,1,0,\ldots),\ldots)$ est une base de l'espace vectoriel des suites de la forme $(u_0,u_1,u_2,\ldots,u_n,0,0,0,\ldots)$ ie $\{$suites qui stationnent sur $0\}$ **Remarque 12**

À l'aide de la remarque **??**, on peut reformuler la définition 5 du chapitre précédent :

1. Une droite (vectorielle) est un sev de E ayant une base formée d'un seul vecteur.
2. Un plan (vectoriel) est un sev de E ayant une base formée de deux vecteurs.

II.4 Bases adaptées

Définition 10 .

Étant données deux familles $\mathcal{F}=(u_i)_{i\in I}$ et $\mathcal{G}=(v_j)_{j\in J}$, on notera (notation maison) $\mathcal{F}\sqcup\mathcal{G}$ la famille obtenue en concaténant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, qu'on peut, par exemple, formellement définir par $\mathcal{F}\sqcup\mathcal{G}=(w_k)_{k\in K}$ où $K=I\times\{0\}\cup J\times\{1\}$ et $w_k=\begin{cases} u_i \text{ si } k \text{ est de la forme } (i,0)\\ v_j \text{ si } k \text{ est de la forme } (j,1).\end{cases}$