Familles remarquables d'un espace vectoriel

Remarque 1

Pas un sev par exemple : $\mathbb{R}_{=n}[X] \cup \{0\}$ car $X^n - 1 - X^n \notin \mathbb{R}_{=n}[X] \cup \{0\}$

I Familles et combinaisons linéaires

I.1 Familles

Définition 1 : Rappel.

Une famille $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ est la donnée, pour tout élément i de l'ensemble d'indices I, d'un vecteur $v_i \in E$, i. e. une application $\mathcal{F} : I \to E$.

Une famille peut être finie ou infinie.
Dans le cas $I = \mathbb{N}$, une famille indexée par I est une suite. On peut noter indifféremment $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ou $\big(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\big)$.
Dans le cas $I = \{1, 2, \dots, n\}$, on peut noter indifféremment $(v_i)_{\{1,2,\dots,n\}}$ ou $\big(v_1, v_2, \dots, v_n\big)$.
Sauf mention explicite du contraire, on indexera toutes nos familles finies par $\{1, 2, \dots, n\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
Par abus, on appellera **cardinal de la famille** $(v_i)_{i \in I}$ le cardinal de I.

Exemples 1 : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$.

1. On peut considérer la famille finie $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$.
2. On peut considérer la famille infinie $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}3k+1\\3k+2\\3k+3\end{pmatrix}, \dots\right) = \left(\begin{pmatrix}3n+1\\3n+2\\3n+3\end{pmatrix}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. On peut considérer la famille infinie $\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix}1\\t\\2\end{pmatrix}\right)_{t \in \mathbb{R}}$.

Exemples 2 : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Notons $f_\lambda = t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. On peut considérer la famille $\big(f_\lambda\big)_{\lambda \in \mathbb{R}}$.
2. On peut considérer $(1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de $\mathbb{K}[X]$

I.2 Sous-familles

Définition 2 : Sous-famille.

Soit $\mathcal{F}$ une famille. On appelle <u>sous-famille</u> de $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ une famille obtenue en « retirant certains vecteurs à $\mathcal{F}$ », c'est-à-dire une famille de la forme $(v_i)_{i \in J}$ avec $J \subset I$.

Exemples 3

— Une sous famille de (e_1, e_2, e_3) est (e_1, e_2).

— Une sous famille de $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est $(f_{2\pi t})_{t \in \mathbb{N}}$

/!\ $(e_1, e_2, e_2, e_3) \neq (e_1, e_2, e_3)$

I.3 Combinaisons linéaires

Définition 3 : Rappel.

On appelle <u>combinaison linéaire</u> des vecteurs d'une famille $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ toute expression de la forme suivante : $\alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + \cdots + \alpha_r v_{i_r}$ où les α_k sont des scalaires et les i_k des éléments de I.

Le prof n'écrit jamais « combinaison linéaire », il écrit toujours CL.

/!\ Une CL des vecteurs de $(v_i)_{i\in I}$ est une somme **finie** de vecteurs de la forme $\alpha_k v_{i_k}$!

Suivant le contexte, l'expression CL pourra désigner ou bien l'expression formelle, ou bien le résultat de l'opération désignée par cette expression. Mais, quand bien même on se réfèrerait à l'expression formelle, on fait systématiquement les deux identifications suivantes :

1. on identifie les CL qui ne se distinguent que par l'ordre des vecteurs, ;
2. on identifie une CL de la forme $\alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + \ldots + \alpha_r v_{i_r} + 0 v_{i_{r+1}}$ avec $\alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + \ldots + \alpha_r v_{i_r}$.

Remarque 2
Conséquence des deux identifications précédentes : une CL de $(v_1, \ldots, v_n)$ est toujours de la forme $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$.

Exemple 4

— Une CL des $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme

— Une CL des $(\cos\circ(\omega\cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}), \sin\circ(\omega\cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}))_{\omega\in\mathbb{R}_+}$

Remarque 3
À toute partie $P \subset E$, on peut canoniquement associer une famille : la famille $(v)_{v\in P}$. On peut donc sans difficulté parler de CL des vecteurs d'une partie de E. On retrouve alors la notion vue dans le chapitre précédent. En particulier, on peut parler du sous-espace vectoriel engendré par une famille.

II Familles remarquables

II.1 Liberté

Définition 4 .

Étant donnée une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E, on appelle CL triviale des vecteurs de $\mathcal{F}$ la CL obtenue en prenant tous les α_k nuls. La CL triviale est nulle, au sens où elle s'évalue en 0_E, le vecteur nul de E. C'est une CL $(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k)$ où $\begin{cases}(\alpha_i)\in\mathbb{K}\\(x_i)\in E\end{cases}$

Définition 5 : Liberté.
Une famille est dite libre lorsque sa seule CL nulle est la CL triviale. Dans le cas contraire, elle est dite liée.

Remarque 4

Pour tout $\begin{cases}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in\mathbb{K}^k\\(x_1,\ldots,x_k)\in E^k\end{cases}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$ alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$

Pour montrer qu'une famille est liée $\exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ non tous nuls, $\exists(x_1,\ldots,x_k)$ tel que

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0.$$

Remarque 5
Par définition, une sous-famille d'une famille libre est libre. En contraposant, on obtient que si $\mathcal{F}$ a une sous-famille liée, alors $\mathcal{F}$ est liée. Par contre, une sous-famille d'une famille liée peut très bien être libre.
Soient $(j_1,\ldots,j_k)\in J$. Soient $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in\mathbb{K}^k$ et $(x_{j_1},\ldots,x_{j_k})\in E^k$ tels que $\alpha_1, x_{j_1} + \cdots + \alpha_k x_{j_k} = 0$.
On a $J\subset I$, donc $(j_1,\ldots,j_k)\subset I$. Comme $(x_k)_{k\in I}$ est libre.
Donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ Donc $(x_k)_{k\in J}$ est libre.

/!\ Une surfamille d'une famille liée est liée **mais** une sous-famille d'une famille liée peut être libre ! Par exemple, (e_1, e_2, e_3) est libre mais (e_1, e_2, e_2, e_1) est liée

Exemples 5 *Les familles des exemples 1, 2, 3 sont-elles libres ?*

1. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre :
   Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 &= \alpha_3 = 0.\end{aligned}$$

2. $\left(\begin{pmatrix}3n+1\\3n+2\\3n+3\end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée
   Meth 1

$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\11\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

   Meth 2

$$\begin{aligned}2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\10\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow 2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. $\left(\begin{pmatrix}1\\t\\2\end{pmatrix}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ Meth 1

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

   Meth 2

$$2\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}.$$

4. $(\exp\circ(\lambda\cdot \mathrm{id}))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre. Soient $k \in \mathbb{N}^\times$ et $\begin{cases}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k\\(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k\end{cases}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha_k e^{\lambda_k t} = 0.$$

$\boxed{\text{But}}$ $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ *En dérivant*

$$\begin{aligned}
\alpha_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + \alpha_k\lambda_k e^{\lambda_k t} &= 0\\
\alpha_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + \cdots + \alpha_k\lambda_k^2 e^{\lambda_k t} &= 0\\
&\vdots \quad n \text{ fois}\\
\alpha_1\lambda_1^n e^{\lambda_1 t} + \cdots + \alpha_k\lambda_k^n e^{\lambda_k t} &= 0
\end{aligned}.$$

Matriciellement,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^0 e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_k t}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_k e^{\lambda_k t}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^n e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^n e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_k^n e^{\lambda_k t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

En $t = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_k^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

En $n = k-1$, la matrice est carrée.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_k^n\end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le k}(\lambda_i - \lambda_j) \qquad \text{d'après Vandermonde.}$$

On précise : comme on a choisi $f_{\lambda_i} \neq f_{\lambda_j}$, on a $\exists t_0 \in \mathbb{R}, e^{\lambda_i t_0} \neq e^{\lambda_j t}$ ie $\exists t_0 \in \mathbb{R}, \lambda_i t_0 \neq \lambda_j t$ (car $\lambda_i t_0$ et $\lambda_j t_0$ non nuls) On a doc $\exists t_0 \neq 0, \lambda_i \neq \lambda_j$

Donc les $(\lambda_i)_{1\le i\le k}$ sont 2 à 2 distincts donc la matrice est inversbile et $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Ce qu'on sait à la base :

$$(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, \dots f_{\lambda_k})$$

sont des vecteurs de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 2 à 2 distincts. $\square$

Remarque 6

La liberté est une notion intrinsèque, elle ne dépend pas de E.

Par exemple, la famille $\left(f_\lambda\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est aussi libre vue comme famille de vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Définition 6 .

On dit que deux vecteurs u et v de E sont colinéaires, et on note $u \mathbin{/\!/} v$, lorsqu'on a :
$\exists k \in \mathbb{K}, u = kv$ ou $\exists k \in \mathbb{K}, v = ku$.

Remarque 7

0. La famille $\emptyset$ est libre. $\mathbb{T}\ \mathbb{R}\ \mathbb{I}\ \mathbb{V}\ \mathbb{I}\ \mathbb{A}\ \mathbb{L}$
1. Pour $u \in E$, la famille (u) est libre si et seulement si on a $u \neq 0_E$.
2. Pour $(u,v) \in E^2$, la famille (u,v) est libre si et seulement si u et v sont non colinéaires.

Démonstration. 1. $\boxed{\Longrightarrow}$

Soit $u \in E$ tel que (u) est libre.

Donc pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha_u = 0 \implies \alpha = 0$.

En contraposant : $\alpha = 1 \neq 0$ donc $1 \times u \neq 0$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $u \neq 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha u = 0$ donc $\alpha = 0$

2. $\Leftrightarrow$ $[(u, v)$ est liée $\Leftrightarrow u$ et v sont colinéaires$]$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons la famille (u, v) liée.

Alors il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ tels que

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v = 0$$
$$\alpha_1 \neq 0 \implies u = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} v$$
$$\alpha_1 = 0 \implies \alpha_2 v = 0 \implies v = 0 = 0 \times u \implies u // v.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $u//v$.

Donc il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $u = kv$ ou $v = ku$.

ie $u - kv = 0$ ou $v - ku = 0$ donc (u, v) est liée

□

/!\ Une famille de 3 vecteurs 2 à 2 non colinéaires peut très bien être liée !

Exemple : La famille $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$ est liée mais les vecteurs sont 2 à 2 non colinéaires

Exercice 1.

<u>Idée</u> une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ libre

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si la somme est directe, montrons que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre.

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\underbrace{\alpha_1 v_1}_{\in \mathrm{Vect}(v)_1} + \underbrace{\alpha_2 v_2}_{\in \mathrm{Vect}(v)_2} + \cdots + \underbrace{\alpha_n v_n}_{\in \mathrm{Vect}(v)_n} = 0$

Or tout élément de $\mathrm{Vect}\,(v)_1 + \mathrm{Vect}\,(v)_2 + \cdots + \mathrm{Vect}\,(v)_n$ a une unique décomposition dans cette somme.

On sait que $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$ donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = v_n$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ libre.

Soit $v \in \mathrm{Vect}\,(v)_1 + \cdots + \mathrm{Vect}\,(v)_n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \qquad \text{où } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \text{ et } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Donc $(\alpha_2 - \lambda_2)v_2 + (\alpha_2 - \lambda_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n - \lambda_n)v_n = 0$

Or la famille est libre, donc $\begin{cases} \alpha_1 - \lambda_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n - \lambda_n = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha_1 = \lambda_1 \\ \vdots \\ \alpha_n = \lambda_n \end{cases}$.

II.2 Caractère générateur

Définition 7 .
Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est dite <u>génératrice</u> de E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire comme CL des vecteurs de $\mathcal{F}$.

Remarque 8

La notion de famille génératrice n'est pas une notion intrinsèque, elle dépend de E.

Plus précisément, « $\mathcal{F}$ est génératrice de E » peut se reformuler « $E = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ ». En particulier, toute famille $\mathcal{F}$ est toujours génératrice d'un $\mathbb{K}$-ev : le $\mathbb{K}$-ev $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$!

Exemples 6 *Les familles des exemples 1, 2, 3 sont-elles génératrices de E ?*

Méthode On prend $x \in E$. On cherche des $\begin{cases} \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} \\ v_1, \dots, v_k \in \mathcal{F} \end{cases}$ tel que $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$.

1. Montrons que (e_1, e_2, e_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3) &= \left\{ \lambda e_1 + \mu e_2 + \xi e_3, (\lambda, \mu, \xi) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

.

2. Soit $\begin{cases} a & > 0 \\ b & \neq 0 \\ c & = 0 \end{cases}$, on regarde $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   On cherche $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ tel que

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \begin{pmatrix} 3i+1 \\ 3i+2 \\ 3i+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   On remaruqe que $\begin{pmatrix} 3n+1 \\ 3n+2 \\ 3n+3 \end{pmatrix} = 3n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   (1) donne :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sum 3i\alpha_i \\ \sum 3i\alpha_i \\ \sum 3i\alpha_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum \alpha_i \\ 2\sum \alpha_i \\ 3\sum \alpha_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ \implies a - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i &= b - 2\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = c - 3\sum_{i=1}^{k} \alpha_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a = b = 0 &\implies \sum \alpha_i = 2\sum \alpha_i \\ &\implies \sum \alpha_i = 0. \end{aligned}$$

   Le vecteur s'écrit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$. Avec $\boxed{c = 1}$, on trouve $c - 3\sum \alpha_i = 0 \implies c = 0$

   Donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne peut pas s'écrire comme CL des vecteurs $\begin{pmatrix} 3n+1 \\ 3n+2 \\ 3n+3 \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}_{t \in \mathbb{R}}$. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   Soient $\begin{cases} \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \\ t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R} \end{cases}$ tel que $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 \\ 2 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_k \begin{pmatrix} 1 \\ t_k \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   ie

$$\begin{pmatrix} \sum \alpha_i \\ t_i \sum \alpha_i \\ 2\sum \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

.

$$\begin{cases} a &= 2 \\ b &= 0 \\ c &= 2 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} \sum \alpha_i \\ t_i \sum \alpha_i \\ 2\sum \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \sum \alpha_i = 2 = 2 \sum \alpha_i$$

4. La fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ n'est pas CL des (f_λ) par croissance comparée.

   Supposons qu'il existe $\begin{cases} (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \end{cases}$.

   tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + \cdots + \alpha_k e^{\lambda_k t}$.

   — Si on avait les $\lambda_i < 0$ impossible car le 2ème terme tend vers 0

   — Si on avait les $\lambda_i \leq 0$ alors le 2ème terme tend vers une constante

   — S'il existe des $\lambda_i > 0$: le plus grand λ_i définit la croissance du 2ème terme

   `side-by-side grahs of id and e^(lambda t) (lambda > 0)`

   Donc cette famille n'est pas génératrice.

5. Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ donc ok.

Méthode Montrer que la fonction $\sin \circ \pi \mathrm{id}$ ne s'écrit comme CL des (f_λ).
La fonction $\sin \circ \pi \mathrm{id}$ s'annule sur $\mathbb{N}$.

— On évalue en le bon nombre d'entiers, et on trouve un déterminant de Vandermonde.

Remarque 9

Toute famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$

II.3 Bases

Définition 8 .
On dit d'une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de E que c'est une base de E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire de façon unique comme CL des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Proposition 1 : Reformulation de la définition.
Une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de E est une base si et seulement si elle est libre et génératrice de E.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. La famille $\mathcal{B}$ est une base si et seulement si tout vecteur de E admet exactement une décomposition comme CL des vecteurs de $\mathcal{B}$. Elle est génératrice si et seulement si tout vecteur de E admet au moins une décomposition comme CL des vecteurs de $\mathcal{B}$. Pour montrer la proposition, il suffit donc de montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre si et seulement si tout vecteur de E admet au plus une décomposition comme CL des vecteurs de $\mathcal{B}$. Montrons-le par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\mathcal{B}$ libre. Soit $v \in E$ et supposons avoir deux décompositions de v comme CL des vecteurs de $\mathcal{B}$: $v = \alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + \cdots + \alpha_r v_{i_r} = \beta_1 v_{j_1} + \beta_2 v_{j_2} + \cdots + \beta_s v_{j_s}$. Quitte à réordonner les termes de chaque CL et à rajouter des termes nuls (voir la convention présentée dans la section I.2), on peut supposer avoir $s = r$ et, pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, $j_k = i_k$. On trouve donc $(\alpha_1 - \beta_1)v_{i_1} + (\alpha_2 - \beta_2)v_{i_2} + \cdots + (\alpha_r - \beta_r)v_{i_r} = 0_E$, puis, par liberté de $\mathcal{B}$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, …, $\alpha_r = \beta_r$. D'où l'unicité d'une telle décomposition.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que, pour tout vecteur $v \in E$, il existe au plus une décomposition de v comme CL des vecteurs de E. C'est en particulier vrai pour le vecteur nul 0_E, ce qui signifie qu'il existe au plus une CL nulle des vecteurs de $\mathcal{B}$. Comme la CL triviale est clairement nulle, on en déduit que la seule CL nulle des vecteurs de E est la CL triviale, c'est-à-dire que $\mathcal{B}$ est libre. □

Définition 9 : (informelle).
Lorsqu'un espace vectoriel E est livré en kit avec une base, c'est-à-dire lorsque les vecteurs de cet espace sont, par définition, des CL uniques des vecteurs d'une famille $\mathcal{C}$, cette famille est une base de E et on l'appelle la base canonique de E.

Exemples 7

1. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ a pour base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où e_i est le n-uplet dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ième qui vaut 1. En effet, les coefficients du n-uplet $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sont x_1, …, x_n, et on a bien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$.
2. L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ a pour base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$.
3. Pour la même raison, l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ a pour base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
4. L'espace $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ a pour base canonique $(E_{ij})_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}\times\{1,\ldots,q\}}$
$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1q} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pq} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \{a_{11}E_{11} + \cdots + a_{pq}E_{pq}, a_{ij} \in \mathbb{K}\}\end{aligned}$$
5. $$\begin{aligned}\mathbb{K}^{\mathbb{N}} &= \{(u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots), u_i \in \mathbb{K}\} \\ (u_n)_n &= \underbrace{u_0(1, \ldots, 0, \ldots 0, \ldots) + u_1(0, 1, 0, \ldots) + \ldots}_{\text{pas une CL finie !}}\end{aligned}$$
donc $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ n'a pas de base canonique

Remarque 10

$((1, 0, \ldots, 0, \ldots), (0, 1, 0, \ldots), \ldots)$ est une base de l'espace vectoriel des suites de la forme $(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, 0, 0, 0, \ldots)$ ie {suites qui stationnent sur 0}

Remarque 11

À l'aide de la remarque 7, on peut reformuler la définition 5 du chapitre précédent :

1. Une droite (vectorielle) est un sev de E ayant une base formée d'un seul vecteur.
2. Un plan (vectoriel) est un sev de E ayant une base formée de deux vecteurs.

II.4 Bases adaptées

Définition 10 .
Étant données deux familles $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in I}$ et $\mathcal{G} = (v_j)_{j\in J}$, on notera (notation maison) $\mathcal{F} \sqcup \mathcal{G}$ la famille obtenue en concaténant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, qu'on peut, par exemple, formellement définir par $\mathcal{F} \sqcup \mathcal{G} = (w_k)_{k\in K}$ où $K = I \times \{0\} \cup J \times \{1\}$ et $w_k = \begin{cases} u_i \text{ si } k \text{ est de la forme } (i, 0) \\ v_j \text{ si } k \text{ est de la forme } (j, 1). \end{cases}$

On définit de même la concaténation $\mathcal{F}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{F}_n$ de n familles.

Théorème-définition 1 : Base adaptée.

Si on a $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$, où, pour tout i, $\mathcal{B}_i$ est une base de F_i, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_n$ est une base de E.

Une telle base est appelée base adaptée à la somme directe.

Réciproquement si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{F}_n$ est libre, alors on a $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\mathcal{F}_1) \oplus \cdots \oplus \text{Vect}(\mathcal{F}_n)$, et $\mathcal{F}$ est une base adaptée à cette somme directe.

Démonstration. Je fais pour $n = 2$.

- Supposons avoir $E = F_1 \oplus F_2$, avec $\mathcal{B}_1$ une base de F_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de F_2. Montrons que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ est bien une base de E en montrant qu'elle est libre et génératrice.
  D'après le résultat de l'exercice 1 plus haut, on a $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \text{Vect}(\mathcal{B}_1) + \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$ c'est-à-dire $\text{Vect}(\mathcal{B}) = F_1 + F_2 = E$. D'où le caratère générateur de $\mathcal{B}$.
  Considérons une CL nulle des vecteurs de $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$: une telle CL s'écrit sous la forme $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q = 0_E$, où les u_i sont des vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et les v_j des vecteurs de $\mathcal{B}_2$. Posons $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$ et $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q$. On a ainsi $u + v = 0_E$, et comme $\mathcal{B}_1$ est une base de F_1 on a $u \in F_1$, et comme $\mathcal{B}_2$ est une base de F_2 on a $v \in F_2$. La somme $F_1 \oplus F_2$ étant directe, on a donc $u = v = 0_E$, c'est-à-dire $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q = 0_E$. Par liberté de $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}_2$, on a donc bien $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu_1 = \cdots = \mu_q = 0$.
  D'où la liberté de $\mathcal{B}$.
- Supposons avoir $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \sqcup \mathcal{F}_2$ libre. Les familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont libres comme sous-familles de $\mathcal{F}$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on a par définition $\mathcal{F}_i$ génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F}_i)$, et par liberté elle en forme bien une base.
  Alors on a $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\mathcal{F}_1) \oplus \text{Vect}(\mathcal{F}_2)$ et $\mathcal{F}$ est une base adaptée à cette somme directe. □

Exemple 8

1. $\underbrace{Ox}_{\text{base } e_1} \oplus \underbrace{Oy}_{\text{base } e_2} = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{base } e_1 \sqcup e_2 = (e_1, e_2)}$

$$\mathbb{R}^2 = \text{Vect}\left(\underbrace{e_1}_{Ox = \text{Vect}(e_1)}, \underbrace{e_2}_{Oy = \text{Vect}(e_2)} \right)$$

2. $\mathbb{R}[X]$ a pour base $(1, X, \ldots, X^n \,\vdots\, X^{n+1}, \ldots)$
   Alors $\mathbb{R}[X] = \underbrace{\text{Vect}(1, X, \ldots, X^n)}_{\mathbb{R}_n[X]} \oplus \underbrace{\text{Vect}\left(X^{n+1}, \ldots\right)}_{X^{n+1}\mathbb{R}[X]}$
   et $(1, X, \ldots, X^n, X^{n+1}, \ldots)$ est une base adaptée à la somme directe.
3. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x + y + z = 0 \right\}_{F_1} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}_{F_3} = \mathbb{R}^3$
   — Base de F_1 : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$
   — Base de f_3 : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

   Une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

La proposition précédente donne un procédé explicite de construction de sous-espaces supplémentaires : on considère une base de E, on la scinde en deux, et on obtient les bases de deux sous-espaces supplémentaires de E.

Exemple 9 Notons $\begin{cases} \mathcal{F}_1 & = (1, X, X^2, \ldots, X^{2n}, \ldots) \\ \mathcal{F}_2 & = (X, X^3, \ldots, X^{2n+1}, \ldots) \end{cases}$.

$\mathcal{F}_1 \sqcup \mathcal{F}_2$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
Donc {polynômes pairs} $\oplus$ {polynômes impairs} $= \mathbb{R}[X]$.

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\,(()\,\underbrace{E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}}_{E_{ii}}, \underbrace{E_{12}, E_{13}, \dots, E_{n-1,n}}_{E_{ij}, i<j}, \vdots, \underbrace{E_{21}, E_3 1, \dots, E_{n,n-1}}_{E_{ij}, i>j}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &= \mathrm{Vect}\,(()\,E_{ii}) \oplus \mathrm{Vect}\,((E_{ij})_{i<j}) \oplus \mathrm{Vect}\,((E_{ij})_{i>j}) \\ &= \{\text{diagonales}\} \oplus \{\text{triangulaires supérieures strictes}\} \oplus \{\text{triangulaires inférieures strictes}\}\end{aligned}$$

$\square$