Familles en dimension finie

Dans toute la feuille, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Espaces de dimension finie (ou pas)

Exercice 1. *Exemples d'espaces de dimension finie*
Justifier que les espaces vectoriels suivants (les lois sont implicites et on ne demande pas de montrer qu'il s'agit bien d'espaces vectoriels) sont de dimension finie, et en donner la dimension et une base :

1. $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{K}^5,\ x_1 + 2x_2 + x_3 = x_2 + 4x_4 = x_1 + x_3 - 8x_4 = 0\}$;
2. $\{P \in \mathbb{K}_3[X],\ P(-1) = P'(1) = 0\}$;
3. $\{P \in \mathbb{K}_3[X],\ P(0) = P(1) = P(2)\}$;
4. L'espace des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ périodiques de période N, où $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est fixé.

Exercice 2. *Exemples d'espaces de dimension infinie*
Justifier que les espaces vectoriels suivants (les corps et les lois sont implicites et on ne demande pas de montrer qu'il s'agit bien d'espaces vectoriels) ne sont pas de dimension finie :

1. L'espace vectoriel engendré par les fonctions croissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
2. L'espace de toutes les suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
3. L'espace des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ périodiques.

Calculs dans un sev de dimension finie

Exercice 3. *Rang*

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
3. $(x \mapsto \ln(x), x \mapsto \ln(2x), x \mapsto \ln(3x), \ldots, x \mapsto \ln(nx))$ dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

Exercice 4. *Polynômes trigonométriques*
On désigne par n un entier naturel. On note

$$F = \operatorname{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), \ldots, x \mapsto \cos^n(x)) \text{ et } G = \operatorname{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), \ldots, x \mapsto \cos(nx)).$$

Justifier que F et G sont de dimension finie, puis déterminer leur dimension, puis montrer qu'on a $F = G$.

Morphisme de décomposition

Exercice 5. *Base de Bernstein*

Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $B_k(X) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} X^k (1 - X)^{n-k}$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (B_0, \ldots, B_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Donner la décomposition des polynômes 1 et X^n dans $\mathcal{B}$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n} kB_k$ et en déduire la décomposition du polynôme X dans $\mathcal{B}$.
   Généralisation ?

Suites récurrentes linéaires doubles

Exercice 6. *Application directe*

1. Décrire simplement l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
2. Donner en fonction de n l'expression du terme général de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = 3u_{n+1} - 2b_n$.

Exercice 7. *Suites récurrentes linéaires doubles à coefficients constants*

1. Donner en fonction de n l'expression de u_n lorsqu'on a $u_0 = u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. Donner en fonction de n l'expression de u_n lorsqu'on a $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
3. Donner en fonction de n l'expression de u_n lorsqu'on a $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.