Familles en dimension finie

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

N.B. : le fait que $\mathbb{K}$ soit un corps est essentiel. On verra dans la suite que c'est toujours la même propriété qui assure la plupart des résultats, à savoir : **on peut diviser par un scalaire non nul**.

I Espaces vectoriels de dimension finie

I.1 Extension et réduction

Lemme 1 : Principe de réduction d'une famille génératrice.

Soit $\mathcal{G} \sqcup (u)$ une famille génératrice de E. Si $u \in \operatorname{Vect}(\mathcal{G})$, alors la sous-famille $\mathcal{G}$ est génératrice de E.

Lemme 2 : Principe d'extension d'une famille libre.

Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E et $u \in E$. Si $u \notin \operatorname{Vect}(\mathcal{L})$ alors la famille $\mathcal{L} \sqcup (u)$ est libre.

Remarque 1

On retrouve un cas particulier du théorème sur les bases adaptées.

I.2 Définition – exemples

Définition 1 .

L'espace vectoriel E est dit <u>de dimension finie</u> lorsqu'il admet une famille génératrice finie. Sinon, il est dit de <u>dimension infinie</u>.

Remarque 2

Si E est un espace de dimension finie, il n'y a pas en général unicité d'une famille génératrice engendrant E. Par exemple, que les familles $\big(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}\big)$ et $\big(\exp, t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\big)$ engendrent le même espace vectoriel.

I.3 Existence de bases

Théorème 1 : de la base extraite.

On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors :

1. E a une base finie :
2. toute sous-famille génératrice minimale de $\mathcal{G}$ et toute sous-famille libre maximale de $\mathcal{G}$ est une base de E.

Théorème 2 : de la base incomplète.

Soient $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_m)$ une famille génératrice de E. Alors on peut choisir certains vecteurs $v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}$ de $\mathcal{G}$ de sorte que la famille $\mathcal{L} \sqcup (v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$ soit une base de E.

Remarque 3

Ce théorème indique qu'en dimension finie les familles libres sont des « bases incomplètes », *i. e.* qu'on peut obtenir des bases en leur rajoutant convenablement des vecteurs (et de plus ces vecteurs peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de E).

I.4 Dimension

Lemme 3 : Lemme d'échange (version simplifiée)..

Supposons que E soit de dimension finie. Soit $\mathcal{B}_1 = (u_i)_{i \in I}$ une base de E et $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon_j)_{j \in \{1, \ldots, s\}}$ une base finie de E. Alors :

$$\forall i_0 \in I,\ \exists j_0 \in \{1, \ldots, s\},\ (u_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \sqcup (\varepsilon_{j_0}) \text{ est une base de } E.$$

Autrement dit : **tout vecteur de $\boldsymbol{\mathcal{B}_1}$ peut être échangé contre un vecteur de $\boldsymbol{\mathcal{B}_2}$**, si celui-ci est bien choisi, la famille obtenue restera une base.

Théorème 3 .

Supposons E de dimension finie. Alors toutes les bases de E sont finies et de même cardinal.

Définition 2 .

Si E est de dimension finie, on appelle <u>dimension de E</u> et on note $\dim(E)$ le cardinal d'une base de E.

Si E n'est pas de dimension finie, on dit qu'il est de dimension infinie et non note $\dim(E) = +\infty$.

Remarque 4 On peut noter $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ pour bien insister sur le fait que le corps de base est $\mathbb{K}$.

I.5 Morphisme de décomposition dans une base

Définition 3 .

Supposons que E est de dimension finie n et considérons $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E. Pour tout vecteur $u \in E$, on appelle <u>décomposition de u dans la base $\mathcal{B}$</u> et on note $\left|\, u \right._{\mathcal{B}}$ l'unique n-uplet $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ tel qu'on ait $u = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$.

Proposition 1 : Morphisme de décomposition.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E. Alors :

1. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^n \\ u & \mapsto & \left|\, u \right._{\mathcal{B}} \end{array}\right.$ de décomposition dans $\mathcal{B}$ est bijective.
2. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^n \\ u & \mapsto & \left|\, u \right._{\mathcal{B}} \end{array}\right.$ est linéaire, c'est-à-dire :

$$\forall (u,v) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \left|\, (\lambda u + \mu v) \right._{\mathcal{B}} = \lambda \cdot \left|\, u \right._{\mathcal{B}} + \mu \cdot \left|\, v \right._{\mathcal{B}}.$$

II Applications du TBE et du TBI

II.1 Cardinal d'une famille en dimension n

Lemme 4 .

Supposons que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.
2. Toute famille libre de E possède au plus n éléments.

Corollaire 1 .

S'il existe une famille libre infinie de vecteurs de E, alors $\dim(E) = +\infty$.

Théorème 4 .

On contrapose le lemme **??**-2 : si $\dim(E) = n$, toute famille de $n+1$ vecteurs (ou plus) est liée.

Théorème 5 .

Supposons que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathcal{F}$ une famille à n éléments de E. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i. $\mathcal{F}$ est libre.
ii. $\mathcal{F}$ est génératrice.
iii. $\mathcal{F}$ est une base.

II.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 4 .

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle rang de $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension de $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.

$$\mathrm{rg} := \dim \circ \mathrm{Vect}$$

Remarque 5

Le TBE se reformule comme suit : le rang de $\mathcal{F}$ est le cardinal maximal d'une sous-famille libre de $\mathcal{F}$.

Définition 5 : Opérations élémentaires sur une famille de vecteurs.

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_m)$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle opérations élémentaires sur les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ les opérations suivantes :

1. Échanger deux vecteurs de la famille.
2. Ajouter à un vecteur u_i de $\mathcal{F}$ un multiple d'un autre vecteur u_j de $\mathcal{F}$.
3. Multiplier un vecteur u_i de $\mathcal{F}$ par une constante non nulle.

Proposition 2 .

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_m)$ une famille finie de vecteurs de E. Toute famille $\mathcal{G}$ obtenue à partir de $\mathcal{F}$ par opérations élémentaires, et en enlevant le vecteur nul lorsqu'il se présente, a le même rang que $\mathcal{F}$.

II.3 Lien avec le rang d'une matrice

Remarque 6 : Cas $E = \mathbb{K}^p$.

Si $E = \mathbb{K}^p$ alors le rang de la famille $(u_1, \dots, u_q)$ est le rang (par colonnes) de la matrice $\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_q \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

C'est un corollaire immédiat de la proposition précédente.

Remarque 7 : Cas général.

Si $\dim(E) = p$ et que $\mathcal{B}$ est une base **quelconque** de E alors le rang de la famille $(u_1, \dots, u_q)$ est le rang (par colonnes) de la matrice $\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_q \\ |_{\mathcal{B}} & & |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$.

Définition 6 .

Supposons que E soit de dimension finie p. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_q)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle matrice de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$ la matrice $\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_q \\ |_{\mathcal{B}} & & |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$.

III Applications

III.1 Suites récurrentes linéaires doubles

Notation 1 Dans la suite, pour $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, on note $\mathcal{S}_{a,b} = \left\{ \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}$.
(Notation maison et conjoncturelle, c'est juste pour ne pas le réécrire à chaque fois.)

Proposition 3 .

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Alors $\mathcal{S}_{a,b}$ est un plan vectoriel.

Définition 7 .

On appelle polynôme caractéristique d'une suite de $\mathcal{S}_{a,b}$ le polynôme $P_{a,b} = X^2 - aX - b$.

Théorème 6 : Cas de deux racines..

Si on a $\Delta \neq 0$ alors, en notant r_1 et r_2 les deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$ de $P_{a,b}$, on a

$$\mathcal{S}_{a,b} = \left\{ \left(\lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \binom{\lambda}{\mu} \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

Théorème 7 : Cas d'une racine double..

Si on a $\Delta = 0$ alors, en notant r_0 l'unique racine double de $P_{a,b}$, on a :

$$\mathcal{S}_{a,b} = \left\{ \left(\lambda\, r_0^n \; + \; \mu\, n\, r_0^{n-1} \right)_{n \in \mathbb{N}},\ \binom{\lambda}{\mu} \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

(en convenant que le premier terme de la suite $\left(n\, r^{n-1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est nul, y compris pour $r = 0$).

Théorème 8 : Cas sans racine..

On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Si on a $\Delta < 0$ alors, en notant $r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$ et $r\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}$ les deux racines complexes conjuguées de $P_{a,b}$, on a :

$$\mathcal{S}_{a,b} = \left\{ \left(r^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta) \right) \right)_{n \in \mathbb{N}},\ \binom{\lambda}{\mu} \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

III.2 Polynômes de Lagrange

Théorème-définition 9 .

La famille $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On l'appelle base de Lagrange associée à $a_0, \ldots, a_n$.
Les polynômes L_0, ..., L_n s'appellent les polynômes de Lagrange associés à $a_0, \ldots, a_n$.

Remarque 8

Décomposer dans la base de Lagrange est trop simple ! En effet, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ on a $\left. P \right|_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} P(a_0) \\ P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}$.

Remarque 9

- L'approximation lagrangienne est donc concurrente de l'approximation taylorienne. Elle est localement moins précise mais permet de contrôler l'erreur globale.
- L'approximation lagrangienne donne naturellement lieu a des méthodes d'intégration numérique (le cas $n = 0$ correspond à la méthode des rectangles et le cas $n = 1$ à la méthode des trapèzes).

III.3 Base de Taylor

Théorème 10 .

Soit $a \in \mathbb{K}$.

$$(1, X - a, (X - a)^2, \ldots, (X - a)^n) =: \mathcal{T}$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque 10

C'est un corollaire du TRI[1].
En effet c'est libre et pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, en notant $f = x \mapsto P(x)$
On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - T_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$
$$= 0$$

car $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, x], \mathbb{R})$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + f^{(n)} \frac{(x-a)^n}{n!}$

1. Taylor avec reste intégral

Donc

$$P = f(a) + f'(a)(X-a) + \cdots + \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(X-a)^n$$

Donc la famille est génératrice.
Or elle a le bon nombre de vecteurs, donc c'est une base et

$$\begin{array}{c} | \\ P \\ | \end{array}_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f'(a) \\ \frac{1}{2}f''(a) \\ \vdots \\ \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) \end{pmatrix}$$