EX FAMDIMIN

$\boxed{4/1}$

$$F := \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) := \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos(x)^k\right)_{k \in [\![0, n]\!]}$$

$\#\mathcal{F} = n+1 < +\infty$ donc $\dim F$ est finie et

$\dim F \leq n+1$

Montrons $\mathcal{F}$ libre

Considérons une CL nulle : $x \mapsto \lambda^0 \cos(x)^0 + \cdots + \lambda^n \cos(x)^n$

$:= x \mapsto 0$

Notons $X := \cos x$

$$\underbrace{\lambda_0 X^0 + \lambda_1 X^1 + \cdots + \lambda_n X^n}_{\substack{\text{polynôme évalué} \\ \text{en } X = \cos x \text{ égal} \\ \text{à } 0. \text{ ie il a} \\ \text{des racines.}}} = 0$$

Le polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$ de degré $\leq n$ a pour racine tout les réels de la forme $\cos x$ avec $x \in \mathbb{R}$

Autrement dit, il a pour racine au moins tout les réels de $[-1, 1]$. Or tout polynôme non nul a toujours au plus n racines. Donc ce polynôme est nulle.

Donc la famille est libre

rmq

$G := \mathrm{Vect}(\mathcal{G}) := \mathrm{Vect}(\cos \circ k\,\mathrm{id})_{k \in [\![0, n]\!]}$

... à la fin $\boxed{F = G}$

En particulier, $\cos(nx)$ est un polynôme en $\cos x$.

Bah oui ! ;

$$\cos(nx) = \underbrace{T_n}_{\text{Tchebytchev}}(\cos x)$$