Factorisation des polynômes

Exercice 1. *Divisions eucidiennes*

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

a. $X^6 + X^5$ par $X^2 - 1$

b. $2X^3 - 11X^2 + 7X + 20$ par $2X - 5$

c. $X^5 - 5X^4 + 31X^2 - 43X + 6$ par $X^3 - 5X^2 + 6X$

d. $X^4 + 1$ par $X^2 - \sqrt{2}X + 1$

e. X^n par $X - 1$.

Exercice 2. *Factorisations complètes*

1. Donner les décompositions en irréductibles des polynômes suivants :

$$X^3 - 5X^2 + 6X, \quad 2X^3 - 11X^2 + 7X + 20, \quad X^4 + 1.$$

2. Donner les décompositions en irréductibles des polynômes suivants :

$$X^6 - 3X^5 + 3X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 3X + 1, \quad X^6 - 3X^5 + 6X^3 - 3X^2 - 3X + 2$$

3. Lesquels sont scindés, lesquels sont scindés à racines simples ?

Exercice 3. *Application mignonne*

On note $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

1. D'après la calculatrice (ou Python, ou Wolfram Alpha, ou...), que vaut α ?
2. Et sans calculatrice ?
   On pourra calculer α^3...

PS : ATTENTION, LES RÉSULTATS DE CETTE FEUILLE SERVIRONT DANS LA SUIVANTE.

Factorisation polynômes / Exercices / 3

$\alpha = a - b$ avec

$$a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \qquad b = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$$

$$\alpha^3 = (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= \sqrt{5}+2 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}^{\,2}\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}^{\,2} - \sqrt{5}+2$$

$$= 3\left(-(\sqrt{5}+2)^{2/3}(\sqrt{5}-2)^{1/3} + (\sqrt{5}+2)^{1/3}(\sqrt{5}-2)^{2/3}\right) + 4$$

$$3ab^2 = 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\,\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \qquad -3a^2b = -3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

$$= 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})} \qquad = -3\sqrt[3]{(4+4\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}$$

$$= 3\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}} \qquad = -3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$$

$$= 3b \qquad = -3a$$

$$\alpha^3 = (a-b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b = \underbrace{a^3-b^3}_{} + \underbrace{3b-3a}_{}$$

$$= 4 + 3(b-a)$$

$$= 4 - 3\alpha$$

ie α est racine du polynôme :

$$X^3 + 3X - 4$$

On cherche une racine évidente de ce polynôme

$1^3 + 3\cdot 1 - 4 = 0$ donc 1 est racine.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3 + 3x - 4 & x - 1 \\
\ominus & x^3 - x^2 & x^2 + x + 4. \\
\hline
 & x^2 + 3x - 4 & \\
\ominus & x^2 - x & \\
\hline
 & 4x - 4 & \\
\ominus & 4x - 4 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$x^3 + 3x - 4 = (x-1)(\underbrace{x^2+x+4}_{\Delta = -15 < 0})$$

Le polynôme a une unique racine réelle,

or α est racine donc $\boxed{\alpha = 1}$