$\mathbb{K}$-espaces vectoriels – sous-espaces vectoriels

Dans toute la feuille, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. *Sous-espaces vectoriels (ou pas)*

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E proposé (les lois sont implicites).

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ abc = 0 \right\}$ et $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5,\ x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \right\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $F_3 = \mathcal{L}$, l'ensemble des fonctions lipschitziennes dans $E = \mathbb{R}^I$.
3. $F_4 = \left\{ f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x^2) - f(x) \right\}$ dans $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. $F_5 = \left\{ f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)^2 - f(x) \right\}$ dans $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2. *Espaces vectoriels engendrés.*

1. Décrire simplement l'espace vectoriel engendré par $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 3k \\ 3k+1 \\ 3k+2 \end{pmatrix}, \dots \right\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Décrire simplement l'espace vectoriel engendré par $\{x \mapsto x+1,\ x \mapsto x-1\}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3. Décrire simplement l'espace vectoriel engendré par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Sommes - Sommes directes - Supplémentaires

Exercice 3. *Sommes*

On note $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$, $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \mid x - 2y + z = 0 \right\}$ et $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$.

1. Justifier brièvement que F_1, F_2 et F_3 sont des sevs de $\mathbb{K}^3$.
2. Décrire simplement les sommes $F_1 + F_2$, $F_1 + F_3$ et $F_2 + F_3$, en précisant quelles sommes sont directes et pourquoi.

Exercice 4. *Un très gentil supplémentaire.*

On se place dans $E = \mathbb{K}[X]$. Justifier que $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X] = \{\text{polynômes constants}\}$ est un sous-espace vectoriel de *de* E.
Donner un supplémentaire de $\mathbb{K}$ dans E.

Exercice 5. *Supplémentaires*

1. On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \mid x + z = y + t = 0 \right\}$. Montrer que F est un sev de $\mathbb{K}^4$ et en donner un supplémentaire.
2. Donner un supplémentaire de $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 0\}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Que dire de F ?
3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P\mathbb{K}[X] = \{PS,\ S \in \mathbb{K}[X]\}$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$.
   En donner un supplémentaire dans $\mathbb{K}[X]$. On pourra distinguer le cas $P = 0$ des autres cas.
   Indication : qu'énonce le théorème de division euclidienne ? Remarque : que retrouve-t-on ?
4. Donner un supplémentaire de $F = \{\text{fonctions affines}\}$ dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

EX 1 ESP VECT

$\boxed{1/F_1}$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in F_1 \quad \text{car} \quad 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 1 \cdot 2 \cdot 1 \neq 0$$

donc F_1 n'est pas un sev

$\boxed{1/F_2}$

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \right\}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in F_2 \quad \text{car} \quad 0 \leqslant 0 \leqslant 0$$

$$4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \neg(4-1 \leqslant 0 \leqslant -1)$$

donc F_2 n'est pas un sev

$\boxed{1/F_3}$

$x \mapsto 0 \in \mathcal{L}$ car $x \mapsto 0 \in 1\text{-}\mathcal{L}$

Soit $f, g \in \mathcal{L}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Il existe $K_f, K_g \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} |f(x)-f(y)| \leqslant K_f |x-y| \\ \ldots \ldots \quad K_g \ldots \end{cases}$

Posons $K = \max\{K_f, K_g\}$

$$
\begin{aligned}
|(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(y)| &= |\lambda f(x)-\lambda f(y)+\mu g(x)-\mu g(y)| \\
&\leq |\lambda f(x)-\lambda f(y)|+|\mu g(x)-\mu g(y)| \\
&\leq |\lambda||f(x)-f(y)|+|\mu||g(x)-g(y)| \\
&\leq ||\lambda| K_f+|\mu| K_g|\,(x-y) \\
&= K|x-y|
\end{aligned}
$$

EXMESPVECT

$\boxed{1/F_4}$

$$\begin{cases} (x \mapsto 0)''(x) = (x \mapsto 0)(x) = 0 \\ (x \mapsto 0)(x^2) - (x \mapsto 0)(x) = 0 - 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x \mapsto 0 \in F_4 \quad \Rightarrow \quad F_4 \neq \emptyset$$

Soit $f, g \in F_4$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \lambda f''(x) = \lambda f(x^2) - \lambda f(x) \\ \mu f''(x) = \mu f(x^2) - \mu f(x) \end{cases}$$

par somme $\lambda f''(x) + \mu g''(x) = \lambda f(x^2) + \mu g(x^2)$

$\qquad - \lambda f(x) - \mu g(x)$

$\qquad \in F_4$

$\Rightarrow F_4$ sev E

$\boxed{1/F_5}$ $\quad f := x \mapsto 0$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) = 0 \\ f(x)^2 - f(x) = 0^2 - 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \mapsto 0 \in F_5$$

$f := x \mapsto 1$

$f(x^2) - f(x) = 1^2 - 1 = 0 \Rightarrow f \in F_5$

$g := f. \qquad h := 2g + 3f$

$h''(x) = 0$

$h(x)^2 - h(x) = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 1)^2 - 3(2 \cdot 1 + 3 \cdot 1)$

$= 25 - 15 = 10 \neq 0 \Rightarrow F_5$ $\cancel{\text{sev}}$ E

$\boxed{2/1}$ Meth 1

$$\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}3k\\3k+1\\3k+2\end{pmatrix}, \dots\right\}$$

$$= \left\{\lambda_0\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + \dots + \lambda_k\begin{pmatrix}3k\\3k+1\\3k+2\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{N}, \begin{pmatrix}\lambda_0\\ \vdots\\ \lambda_k\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{k+1}\right\}$$

$$= \left\{\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\begin{pmatrix}3i\\3i+1\\3i+2\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{N},\ \lambda_i\in\mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\sum_{i=0}^{k}\lambda_i 3i\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_i\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{N},\ \lambda_i\in\mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\underbrace{\left(3\sum_{i=0}^{k} i\lambda_i\right)}_{\alpha}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\right)}_{\beta}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{N},\ \lambda_i\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\subset \left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

<u>Réciproquement</u> $u\in\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ u=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

$$= \frac{\alpha}{3}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\alpha}{3}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \left(\beta - \frac{\alpha}{3}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{\alpha}{3}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \dots\right\}$$

Meth 2

Les vecteurs de $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \dots\right\}$ sont de la forme

$\begin{pmatrix}3i\\3i+1\\3i+2\end{pmatrix}$ donc ce sont des CL de $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

donc $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \dots\right\} \subset \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

ie $\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \dots\right\} \subset \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ car $\begin{cases}\mathrm{Vect} \in \nearrow_{\subset} \\ \mathrm{Vect} \circ \mathrm{Vect} = \mathrm{Vect}\end{cases}$ croissant pour $\subset$

De même $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ sont des CL $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \dots\right\}$

donc $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \subset \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \dots\right\}$

ie $\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \subset \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \dots\right\}$ car $\begin{cases}\mathrm{Vect} \in \nearrow_{\subset} \\ \mathrm{Vect} \circ \mathrm{Vect} = \mathrm{Vect}\end{cases}$

$\boxed{2/2}$ $F := \mathrm{Vect}\{x \mapsto x+1,\ x \mapsto x-1\}$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(x \mapsto x+1) + \frac{1}{2}(x \mapsto x-1) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \in F \\ \frac{1}{2}(x \mapsto x+1) - \frac{1}{2}(x \mapsto x-1) = x \mapsto 1 \in F\end{cases}$$

$\Rightarrow \mathrm{Vect}\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, x \mapsto 1\} \subset F$ par idempotence & croissance de Vect

$G := \mathrm{Vect}\left\{ \mathrm{id}_{\mathbb{R}},\ x \mapsto 1 \right\}$

$$\begin{cases} x \mapsto x+1 = x \mapsto x \ + \ x \mapsto 1 & \in G \\ x \mapsto x-1 = x \mapsto x \ - \ x \mapsto 1 & \in G \end{cases}$$

donc par croissance et idempotence de Vect

$F \subset G =$ fonctions affines

$\boxed{2/3}$

$$\mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

= matrices symmétriques 2×2

$= S_2(\mathbb{R})$

$\boxed{3/1}$

$$F_1 = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow F_1$ sev $\mathbb{K}^3$

$$F_2 = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow F_2$ sev $\mathbb{K}^3$

$$F_3 = \left\{ \begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow F_3$ sev $\mathbb{K}^3$

$\boxed{3/2}$

$F_1 + F_2 = \mathbb{K}^3$:

$\boxed{\subset}$ ok! ($F_1 + F_2$ sev $\mathbb{K}^3$)

$\boxed{\supset}$ Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$.

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \in F_1 + F_2$ pareil avec $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

puis par croissance de Vect puis $F_1 + F_2 = \mathrm{Vect}\{F_1 + F_2\}$ sev $\mathbb{K}^3$

3/F1

Meth 2 Avec identification d'un Vect

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ x+y+z=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ z = -(x+y) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

$$= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Longrightarrow F_1$ ser $\mathbb{K}^3$

3/2.

$$F_1 + F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -x'+2y' \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ -x-x'-y+2y' \end{pmatrix}}_{\Sigma :\ -(x+x')-(y+y')+3y'},\ \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \right\}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in F_1 + F_2 \Leftarrow \begin{cases} x = 1 \\ x' = 0 \\ y = -1/3 \\ y' = 1/3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in F_1 + F_2 \Leftarrow \begin{cases} x = 0 \\ x' = 0 \\ y = 2/3 \\ y' = 1/3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in F_1 + F_2 \Leftarrow \begin{cases} x = 0 \\ x' = 0 \\ y = -1/3 \\ y' = 1/3 \end{cases}$$

Donc $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \subset F_1 + F_2$

ie $\mathrm{Vect} \underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}_{\mathcal{C}} \subset \mathrm{Vect}\{F_1, F_2\}$

ie $\mathbb{K}^3 \subset \mathrm{Vect}\{F_1, F_2\}$ sev $\mathbb{K}^3$

donc $F_1 + F_2 = \mathbb{K}^3$

Meth 2

$$F_1 + F_2 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\} + \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\} \cup \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

rpl $(u_1, \dots, u_n)$ forme une base de $\mathbb{K}^3$

$$\Longleftrightarrow \det_{\mathcal{C}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$$

ici

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{K}^3$

donc tout vecteur peut s'écrire comme CL unique de

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ie tout vecteur de $\mathbb{K}^3$ est dans $\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

$$= F_1 + F_2$$

ie $\mathbb{K}^3 \subset F_1 + F_2$

La somme n'est pas directe car $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in F_1 \cap F_2$

$F_1 \oplus F_3 = \mathbb{K}^3$

Soit $u \in \mathbb{K}^3$ tq $u := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Analyse Considérons une décomposition blah blah blah

$$u := v + w \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v \in F_1 \\ w \in F_3 \end{cases}$$

$v \in F_1 \iff$ il existe $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ tel que

$$v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ et } x' + y' + z' = 0$$

$w \in F_3 \iff$ il existe $t \in \mathbb{K}$ tel que

$$v = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+t \\ y'+t \\ z'+t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x' + t \\ y = y' + t \\ z = z' + t \end{cases} \quad \text{avec} \quad x' + y' + z' = 0$$

$\Rightarrow x + y + z = 3t$

$\Rightarrow t = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3}$ donc $w = \begin{pmatrix} \frac{x+y+z}{3} \\ | \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix}$$

<u>Synthèse</u>

$w \in F_3$: OK!

$v \in F_1 \Leftarrow \dfrac{2x - y - z - x + 2y - z - x - y + 2z}{3} = 0$

$u \in \mathbb{K}^3$: OK!

$\boxed{4}$

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X] = \{a,\ a \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}\{1_{\mathbb{K}[X]}\} \Rightarrow \mathbb{K} \text{ sev } \mathbb{K}[X]$$

$$P := X\mathbb{K}[X]$$

$$P + \mathbb{K} = \{a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n,\ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n\} + \{a_0,\ a_0 \in \mathbb{K}\}$$

$$= \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n,\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}\}$$

$$= E$$

$$P \cap \mathbb{K} = X\mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K} = \{0\}$$ ça se voit

remq Plus généralement $\mathbb{K}_n[X] \oplus X^{n+1}\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]$

$\boxed{5/3}$ Encore plus généralement

1er Cas $(P = 0)$: $P \cdot \mathbb{K}[X] = \{0\}$ par absorbance

un supplémentaire : $\{0\} \oplus E = E$ car $\{0\}$ neutre

$\{0\} \cap E = E$ car $\{0\}$ absorbant

2e cas $(P \neq 0)$: Soit $A \in \mathbb{K}[X]$

D'après le théorème de division Euclidienne, il existe un unique couple $(P, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{\deg P - 1}[X]$

tel que $A = \underbrace{PQ}_{\in P\mathbb{K}[X]} + \underbrace{R}_{\in \mathbb{K}_{\deg P-1}[X]}$

ie il existe un couple $(T, R) \in P\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{\deg P-1}[X]$

tel que $A = T + R$ (on a $T = P \cdot Q$)

Par définition

$$P\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{\deg P-1}[X] = \mathbb{K}[X]$$

C'est bien une généralisation avec

$$\mathbb{K}_n[X] = \mathbb{K}_{\deg P-1}[X]$$

$$X^{n+1} = P \qquad (\deg P = n+1)$$

$\boxed{5/2}$

$$F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0) = 0\}$$

- $x \mapsto 0 \in F$ car $(x \mapsto 0)(0) = 0$
- Soient $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

  Ainsi $\begin{cases} f(0) = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

$$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0 \Rightarrow \lambda f + \mu g \in F$$

$\Rightarrow$ d'où F sev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$G :=$ fonctions constantes $= \mathrm{Vect}\{x \mapsto \pi\}$

Montrons $F \oplus G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Soit $h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Analyse Considérons une décomposition convenable $h = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in G}$

Ainsi $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \text{il existe } K \in \mathbb{R}, \quad g = x \mapsto K \end{cases}$

Ainsi $h = f + K$

$h(0) = f(0) + K = 0 + K \Rightarrow K = h(0)$

donc $\begin{cases} g = x \mapsto h(0) \\ f = h - g = h - h(0) \end{cases}$

On a un unique candidat

Synthèse

$\begin{cases} f + g = h : \text{ OK} \\ g \in G : \text{ OK} \\ f \in F \Leftarrow f(0) = h(0) - h(0) = 0 : \text{ OK} \end{cases}$

Concl $F \oplus G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$h = \underbrace{h - h(0)}_{\in F} + \underbrace{h(0)}_{\in G}$

5/4

$$F = \mathrm{Vect}\{x \mapsto 1,\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$$

$$G = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \right\}$$

Soit $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

<u>Analyse</u> Considérons une décomposition convenable :

$$\begin{cases} h = f + g \\ f \in F \\ g \in G \end{cases} \quad \text{ie} \quad \begin{cases} h = f + g \\ \text{il existe } \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f = \alpha\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + \beta \\ g(0) = 0 \text{ et } g'(0) = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} h = \alpha\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + \beta + g \\ h(0) = \alpha \cdot 0 + \beta + g(0) = 0 + g(0) = \beta \\ h'(0) = \alpha + g'(0) \qquad\qquad = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow h = h'(0)\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + h(0) + g$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f = h'(0)\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + h(0) \\ g = h - h'(0)x - h(0) \end{cases}$$

<u>Synthèse</u>

$$\begin{cases} f + g = h & \text{ok!} \\ f \in F & \text{ok!} \\ g \in G \Leftarrow & \begin{cases} g(0) = h(0) - h(0) = 0 \\ g'(0) = h'(0) - h'(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

<u>Conclusion</u>

$$F \oplus G = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Exercice 6. *Matrices symétriques, antisymétriques, et de trace nulle.*

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que la **trace** d'une matrice $M = \left(m_{i,j}\right)_{i,j}$ est la somme de ses coefficients diagonaux : $Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques, et $\mathcal{TN}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de trace nulle.

1. Justifier que $\mathcal{TN}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis que $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{TN}_n(\mathbb{K})$.
2. Décrire $\mathcal{A}_2(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_2(\mathbb{K})$ et $\mathcal{TN}_2(\mathbb{K})$. Les décrire comme des sous-espaces vectoriels engendrés. Quels types particuliers de sous-espace forment-ils ?
3. Montrer qu'en général, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires.
4. Montrer qu'en général, $\mathcal{TN}_n(\mathbb{K})$ est un hyperplan.

EX M ESP VECT

6/1

On a $(0) \in TN_n(\mathbb{K})$ car $Tr(0) = 0$

Soient $U, V \in TN_n(\mathbb{K})$ telles que

$$Tr\, U = \sum_{i=1}^{n} u_{ii} = 0$$
$$Tr\, V = \sum_{i=1}^{n} v_{ii} = 0$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^2$

On a $\lambda Tr\, U + \mu Tr\, V$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda u_{ii} + \mu v_{ii}$$
$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} u_{ii} + \mu \sum_{i=1}^{n} v_{ii}$$
$$= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0$$
$$= 0$$

d'où $TN_n(\mathbb{K})$ sev $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ {}^tM = -M \}$$

Mq c'est un sev

- $(0) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ car ${}^t(0) = -(0) = (0)$
- Soient $U, V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$${}^t(\lambda U + \mu V) = \lambda\, {}^tU + \mu\, {}^tV$$
$$= -\lambda U - \mu V$$
$$= -(\lambda U + \mu V)$$

d'où $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sev $\mathcal{TN}_n(\mathbb{K})$

Montrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{TN}_n(\mathbb{K})$

Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Donc $\forall i,j \quad a_{ji} = (-a)_{ij} = -a_{ij}$

$$i = j \Rightarrow a_{ii} = -a_{ii}$$
$$\Rightarrow a_{ii} = 0$$

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$

$\boxed{6/2}$

$$\mathcal{A}_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \ b \in \mathbb{K} \right\}$$
$$= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ b \in \mathbb{K} \right\}$$
$$= \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{TN}_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a+d=0,\ (a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{6/3}$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par analyse-synthèse

Analyse Considérons un couple $(S, A) \in S_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$\begin{cases} M = S + A \\ {}^tM = S - A \end{cases}$$

Ainsi :

$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \qquad A = \frac{M - {}^tM}{2}$$

Synthèse

- $S + A = \dfrac{M + {}^tM + M - {}^tM}{2} = M$

- $^tS = \dfrac{^tM + {}^t({}^tM)}{2} = \dfrac{^tM + M}{2} = S \Rightarrow S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$
- $^tA = \dfrac{^tM + {}^t({}^tM)}{2} = \dfrac{^tM - M}{2} = -A \Rightarrow A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

$\boxed{6/4}$

$$\mathrm{Vect}\, E_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

Montrons $\mathrm{Vect}\, E_{11} + \mathcal{TN}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Posons $\lambda = \mathrm{Tr}\, M$

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} (m_{11}-\lambda) & \cdots & m_{1,n} \\ m_{1,2} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{TN}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & (0) & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{Vect}\, E_{11}}$$

$$\mathrm{Vect}\, E_{11} \cap \mathcal{TN}_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & (0) & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},\ \lambda \in \{0\} \right\}$$

$$= \{(0)\}$$