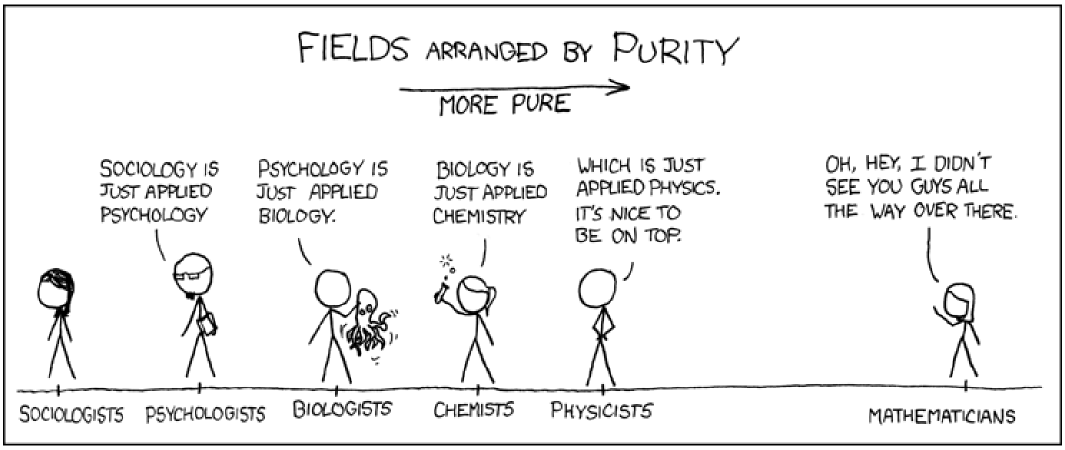

Espaces et sous-espaces vectoriels

On connaît moults $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

$(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$	$(\mathbb{R}[i],+,\cdot) = (\mathbb{C},+,\cdot)$ $(\mathbb{R}[\sqrt{2}],+,\cdot) = (\mathbb{R},+,\cdot)$ $(\mathbb{R}_n[X],+,\cdot)$	$(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$ $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$ $(\mathbb{R}[X],+,\cdot)$	$(DL_n(0),+,\cdot)$ $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$

L'objectif : identifier une banque de théorèmes qui s'appliquent (entre autres) à **tous** les exemples précédents.

Dans toute la suite on fixe un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ (mais en vrai on ne regardera que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ – très éventuellement $\mathbb{Q}$).

Dans toute la suite, $(E,+,\cdot)$ désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (en abrégé $\mathbb{K}$-ev, c'est pas de moi). Rappel : cela signifie

i/ $(E,+)$ est un groupe commutatif

ii/ $\cdot$ est compatible avec $\times_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$

iii/ $\cdot$ est distributive sur $+$

Dans ce contexte, les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ des **scalaires**.

À comprendre tout de suite :

— Les trois opérations structurelles d'un $\mathbb{K}$-ev sont le vecteur nul, l'addition des vecteurs et la multiplication externe.

— On voit tout de suite qu'on peut combiner les deux dernières opérations avec la notion de **combinaison linéaire de deux vecteurs**. Une combinaison linéaire de deux vecteurs est une expression de la forme $\lambda u + \mu v$, où λ, μ sont des scalaires et u, v sont des vecteurs.

— Plus généralement, on voit qu'on peut combiner les trois opérations avec la notion de **combinaison linéaire**. Une combinaison linéaire est une expression de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i$ où r est un entier naturel, les λ_i des scalaires et les u_i des vecteurs.

On notera en abrégé « CL » pour « combinaison linéaire » (ce n'est pas de moi non plus).

I Sous-espaces vectoriels

I.1 Caractérisations équivalentes

Définition 1 .

On appelle sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ (en abrégé « sev », toujours pas de moi) un ensemble F inclus dans E stable pour la structure d'espace vectoriel de E, c'est-à-dire tel que :

- $0_E \in F$,
- $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$,
- $\forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in F$.

Théorème 1 : Utile à la démonstration.

Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si et seulement s'il est non vide et stable par combinaisons linéaires de deux vecteurs, c'est-à-dire $F \neq \emptyset$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda x + \mu y \in F$.

Théorème 2 : Utile à l'exploitation .

Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si et seulement s'il est stable par combinaisons linéaires quelconques, c'est-à-dire si et seulement si on a :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ \forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r,\ \forall (u_1, \ldots, u_r) \in F^r,\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_r u_r \in F.$$

I.2 Exemples et contre-exemples

Remarque 1

Quand un pertie F de E est définie par un système d'équations linéaires homogènes, c'est toujours un sev. **Remarque 2**

Quand on a une partie F de E définie par paramétrage linéaire, c'est toujours un sev de E.

I.3 Structure d'espace vectoriel

Théorème 3 .

Si F est un sev de E, alors les lois de E induisent des lois sur F, et F, muni des lois induites, forme un $\mathbb{K}$-ev.

II Opérations sur les sevs

II.1 Intersection de sevs

Théorème 4 .

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sevs de E. Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sev de E.

Remarque 3

Ça marche pas pour $\cup$: Pour l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$:

$$\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, y \in R \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0, x \in R \end{pmatrix} \right\}, +, \cdot \right)$$

N'est pas un sev : par exemple, il est pas stable par somme.

II.2 Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition 2 .

Pour n un entier naturel et $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, on appelle somme de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ l'ensemble $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \{u_1 + u_2 + \cdots + u_n,\ u_1 \in F_1,\ u_2 \in F_2,\ \ldots, u_n \in F_n\}$.

Théorème 5 .

Pour n un entier naturel et $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sevs de E, $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est un sev de E.

Remarque 4 La somme des sevs est :

- Idempotente : pour tout sev F de E, on a $F + F = F$;
- Commutative : pour tous sevs F et G de E, on a $F + G = G + F$;
- Associative : pour tous sevs F, G et H de E, on a $(F + G) + H = F + (G + H) = F + G + H$;
- Admet pour élément neutre le sous-espace nul : pour tout sev F de E, on a $F + \{0_E\} = \{0_E\} + F = F$.

Remarque 5

$(Ox) + (Oy) = F$

II.3 Sommes directes

Définition 3 .

Une somme $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est dite directe lorsque tout vecteur u de F s'écrit **de façon unique** sous la forme $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ où l'on a $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ u_i \in F_i$. On note alors $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Remarque 6

Une somme de **2** sevs (et pas plus) et directe ssi leur intersection est le sev nul.

Théorème 6 .

Une somme $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est dite directe si et seulement si l'unique décomposition du vecteur nul dans la somme est $0_E = 0_{F_1} + \cdots + 0_{F_n}$.

II.4 Supplémentaires

Définition 4 .

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dit supplémentaires lorsqu'on a $F \oplus G = E$.

Proposition 1 : Caractérisation de supplémentarité.

Deux sevs F et G de E sont supplémentaires si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{array} \right.$.

III D'autres méthodes pour obtenir des $\mathbb{K}$-evs

III.1 Produits de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Théorème 7 : Produit de $\mathbb{K}$-ev.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et E_1, E_2, …, E_n des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel donnée par les opérations composante par composante :

- $0_{E_1 \times \cdots \times E_n} = (0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n})$;
- $\forall (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n,\ (u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u_1, \ldots, u_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n,\ \lambda \cdot (u_1, \ldots, u_n) = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n)$.

III.2 Espaces vectoriels engendrés

Lemme 1 : CL de CL.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev et $P \subset E$. Si un vecteur u de E peut s'obtenir comme CL de vecteurs pouvant eux-même s'obtenir comme CL de vecteurs de P, alors u est lui-même une CL de vecteurs de P.

Proposition 2 : Propriétés fondamentales de Vect.

1. Vect est extensive, c'est-à-dire : $\forall P \subset E,\ \mathrm{Vect}\,(P) \supset P$
2. Vect est croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire :$\forall P, Q \subset E,\ Q \subset E, P \subset Q \implies \mathrm{Vect}\,(P) \subset \mathrm{Vect}\,(Q)$
3. Vect est idempotente, c'est-à-dire : $\mathrm{Vect} \circ \mathrm{Vect} = \mathrm{Vect}$

Remarque 7

Pour $P \subset E$, $P = \mathrm{Vect}\,(P) \Leftrightarrow P$ est un sev

III.3 $\mathbb{K}$-evs et sevs remarquables

Définition 5 .

1. On appelle droite (vectorielle) un sev de E de la forme $\text{Vect}(u)$ avec $u \neq 0_E$.
2. On appelle plan (vectoriel) un sev de E de la forme $\text{Vect}(u, v)$ avec u et v non colinéaires, c'est-à-dire tel qu'aucun des deux n'est un multiple de l'autre.

Définition 6 .

On appelle hyperplan de E un sev de E dont un supplémentaire est une droite.