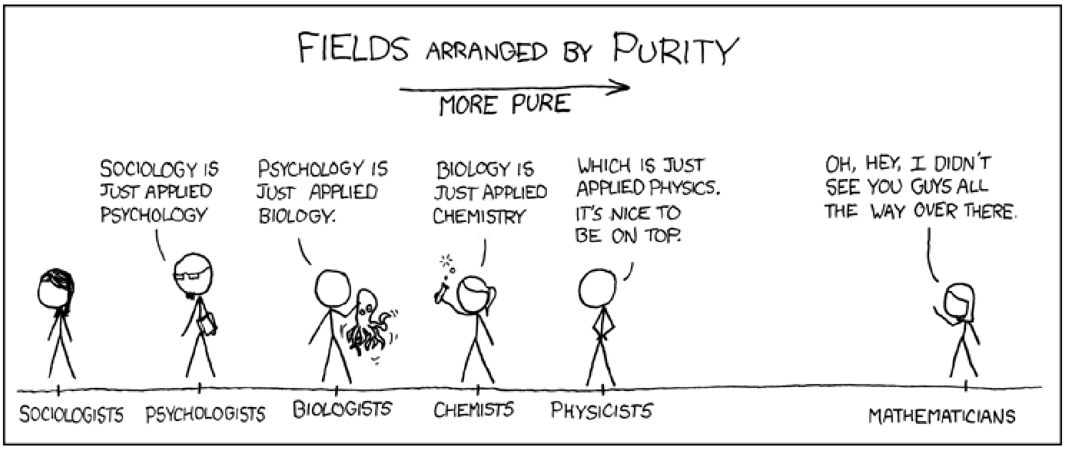


Espaces et sous-espaces vectoriels

On connaît moults $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

$(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),+,\cdot)$	$(\mathbb{R}[i],+,\cdot) \quad = \quad (\mathbb{C},+,\cdot)$	$(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$	$(DL_n(0),+,\cdot)$
$(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$	$(\mathbb{R}[\sqrt{2}],+,\cdot) \quad = \quad (\mathbb{R},+,\cdot)$	$(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$	$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$
	$(\mathbb{R}_n[X],+,\cdot)$	$(\mathbb{R}[X],+,\cdot)$	

L'objectif : identifier une banque de théorèmes qui s'appliquent (entre autres) à **tous** les exemples précédents.

Dans toute la suite on fixe un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ (mais en vrai on ne regardera que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ – très éventuellement $\mathbb{Q}$).

Dans toute la suite, $(E,+,\cdot)$ désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (en abrégé $\mathbb{K}$-ev, c'est pas de moi). Rappel : cela signifie

i/ $(E,+)$ est un groupe commutatif

ii/ $\cdot$ est compatible avec $\times_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$

iii/ $\cdot$ est distributive sur $+$

Dans ce contexte, les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ des **scalaires**.

À comprendre tout de suite :

— Les trois opérations structurelles d'un $\mathbb{K}$-ev sont le vecteur nul, l'addition des vecteurs et la multiplication externe.

— On voit tout de suite qu'on peut combiner les deux dernières opérations avec la notion de **combinaison linéaire de deux vecteurs**. Une combinaison linéaire de deux vecteurs est une expression de la forme $\lambda u + \mu v$, où λ, μ sont des scalaires et u, v sont des vecteurs.

— Plus généralement, on voit qu'on peut combiner les trois opérations avec la notion de **combinaison linéaire**. Une combinaison linéaire est une expression de la forme $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i$ où r est un entier naturel, les λ_i des scalaires et les u_i des vecteurs.

On notera en abrégé « CL » pour « combinaison linéaire » (ce n'est pas de moi non plus).

I Sous-espaces vectoriels

I.1 Caractérisations équivalentes

Définition 1 .

On appelle sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ (en abrégé « sev », toujours pas de moi) un ensemble F inclus dans E stable pour la structure d'espace vectoriel de E, c'est-à-dire tel que :

- $0_E \in F$,
- $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$,
- $\forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in F$.

On a vu que les opérations « addition » et « multiplication externe »peuvent se synthétiser par l'opération « combinaison linéaire de deux vecteurs ». Cela donne immédiatement la caractérisation équivalente suivante.

Théorème 1 : Utile à la démonstration.

Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si et seulement s'il est non vide et stable par combinaisons linéaires de deux vecteurs, c'est-à-dire $F \neq \emptyset$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda x + \mu y \in F$.

Démonstration. Soit $F \subset E$. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E.

Alors $0_E \in F$ donc F est non vide. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in F^2$. Comme F est un sous-espace vectoriel, il est stable par multiplication externe, on a donc $\lambda x \in F$ et $\mu y \in F$. Comme F est un sous-espace vectoriel, il est stable par somme, on a donc $\lambda x + \mu y \in F$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons avoir F non vide et stable par CL de deux vecteurs. F étant non vide, il existe un élément $x_0 \in F$.

- Comme F est stable par CL, on a $0_E = 1x_0 + (-1)x_0 \in F$.
- Soient $x \in F$ et $y \in F$. Par stabilité par CL, on a $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda x + \mu y \in F$. Pour $\lambda = \mu = 1$, on obtient $x + y \in F$. On a donc bien la stabilité par somme de F.
- Soient $x \in F$ et $\lambda \in F$. Par stabilité par CL, on a $\forall (y, \mu) \in F \times \mathbb{K},\ \lambda x + \mu y \in F$. Pour $y = x_0$ et $\mu = 0_E$, on obtient $\lambda x \in F$. On a donc bien la stabilité par multiplication externe de F. □

On a vu que les trois opérations structurelles peuvent se synthétiser par l'opération « combinaison linéaire ». Cela donne immédiatement la caractérisation équivalente suivante.

Théorème 2 : Utile à l'exploitation .

Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si et seulement s'il est stable par combinaisons linéaires quelconques, c'est-à-dire si et seulement si on a :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ \forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r,\ \forall (u_1, \ldots, u_r) \in F^r,\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_r u_r \in F.$$

Démonstration. Le sens réciproque est $\mathbb{T}\ \mathbb{R}\ \mathbb{I}\ \mathbb{V}\ \mathbb{I}\ \mathbb{A}\ \mathbb{L}$, le sens direct se traite par récurrence sur la longueur de la CL. □

L'idée : la définition 1 ou le théorème 1 sont plutôt utiles pour **montrer** qu'une partie est un sev, alors que le théorème 2 est plutôt utile pour **utiliser** qu'une partie est un sev.

I.2 Exemples et contre-exemples

Exemple 1 On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, muni des lois usuelles. La partie $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ x - 2y + z = 0 \right\}$ est-elle un sev ?

Non-vide On a $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F \impliedby 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0$

Stabilité par combinaison linéaire Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F$.
Notons $\begin{cases} \vec{u} &= (x_1; y_1; z_1) \\ \vec{v} &= (x_2; y_2; z_2) \end{cases}$.
On a $\begin{cases} x_1 - 2y_1 + z_1 &= 0 \\ x_2 - 2y_2 + z_2 &= 0 \end{cases}$.

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \mu x_2 - 2(\lambda y_1 + \mu y_2) + \lambda z_1 + \mu z_2 &= \lambda(x_1 - 2y_1 + z_1) + \mu(x_2 - 2y_2 + z_2) \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 \qquad \text{par hypothèse} \\ &= 0 \qquad \text{car } (\mathbb{R}, +, \times) \text{ est un anneau} \\ &\implies \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in F \\ &\implies \boxed{\text{c'est bien un sev}}. \end{aligned}$$

Exemple 2 On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, muni des lois usuelles. La partie $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ x - 2y + z = 1 \right\}$ est-elle un sev ?

On a $0 - 2 \cdot 0 + 0 \neq 1$ donc $0_{\mathbb{R}} \notin W$ donc $\boxed{\text{c'est pas un sev}}$.

Remarque 1

Quand un pertie F de E est définie par un système d'équations linéaires homogènes, c'est toujours un sev.

Exemple 3 On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, muni des lois usuelles. La partie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ 2a-b \\ a+2b \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est-elle un sev ?

Non-nullité On a bien $\begin{pmatrix} 0+0 \\ 2 \cdot 0 - 0 \\ 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in G$ d'où $G \neq \emptyset$

Stabilité par combinaison linéaire Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F$.
Notons $\begin{cases} \vec{u} &= (a_1 + b_1; 2a_1 - b_1; a_1 + 2b_1) \\ \vec{v} &= (a_2 + b_2; 2a_2 - b_2; a_2 + 2b_2) \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} &= \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 + \mu a_2 + \mu b_2 \\ 2\lambda a_1 - \lambda b_1 + 2\mu a_2 - \mu b_2 \\ \lambda a_1 + 2\lambda b_1 + \mu a_2 + 2\mu b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda a_1 + \mu a_2) + (\lambda b_1 + \mu b_2) \\ 2(\lambda a_1 + \mu a_2) - (\lambda b_1 + \mu b_2) \\ (\lambda a_1 + \mu a_2) + 2(\lambda b_1 + \mu b_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
.

On a bien $\begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_2 \\ \lambda b_1 + \mu b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (car $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau), d'où F stable par combinaison linéaire.

Remarque 2

Quand on a une partie F de E définie par paramétrage linéaire, c'est toujours un sev de E.

Exemple 4 On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, muni des lois usuelles. La partie $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \right\}$ est-elle un sev ?

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Or $1^2+1^2+0^2=2$ et $\neg(2\leq 1)$. Donc B n'est pas stable par $+$, donc B n'est pas un sev de E.

Exemple 5 On se place dans $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni des lois usuelles.
L'ensemble des matrices triangulaires supérieures forme-t-il un sev ?

— La matrice nulle est triangulaire supérieure

— Une somme de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure car $0+0=0$

— 0 est absorbant pour $\times_{\mathbb{R}}$ donc une matrice triangulaire supérieure multipliée par un scalaire réel reste triangulaire supérieure.

Exemple 6 On se place dans $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni des lois usuelles. L'ensemble des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{R})$ forme-t-il un sev ?
$(0)\notin GL_n(\mathbb{R})$ donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sev.

Exemple 7 On se place dans $E=\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, muni des lois usuelles. L'ensemble des matrices de rang $\leqslant 2$ forme-t-il un sev ?

$$\begin{aligned} A&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} &&\text{est de rang } 2\\ B&=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} &&\text{est de rang } 1\leq 2\end{aligned}.$$

Mais $A+B=I_3$ n'est pas de rang inférieur à 2.

Exemple 8 Soit I une réunion d'intervalles non triviaux et $E=\mathbb{R}^I$, que l'on muni des lois usuelles. Soit $n\in\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{D}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est-il un sev de E ?

— $t\mapsto 0\in F$, donc $F\neq\emptyset$

— Soient $f,g\in F=\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R}),\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. D'après le cours, $\lambda f+\mu g\in\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$ et $(\lambda f+\mu g)^{(n)}=\lambda f^{(n)}+\mu g^{(n)}$: "F est stable par CL par théorèmes généraux".

I.3 Structure d'espace vectoriel

Théorème 3 .
Si F est un sev de E, alors les lois de E induisent des lois sur F, et F, muni des lois induites, forme un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration. • Voyons que les lois de E induisent des lois sur F.
Tout d'abord on a bien $0_E\in F$ par définition d'un sous-espace vectoriel.
Comme un sous-espace vectoriel est stable par somme, on a $\forall(x,y)\in F^2,\ x+y\in F$. Ainsi, en restreignant la loi $+$ à $F\times F$, on obtient une application $+:F\times F\to E$ que l'on peut corestreindre en une application $+:F\times F\to F$.
Un sous-espace vectoriel est stable par multiplication externe, c'est-à-dire qu'on a
$\forall(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times F,\ \lambda\cdot x\in F$. Ainsi, en restreignant la loi $\cdot$ à $\mathbb{K}\times F$, on obtient une application $\cdot:\mathbb{K}\times F\to E$ que l'on peut corestreindre en une application $\cdot:\mathbb{K}\times F\to F$.
• Les axiomes d'espace vectoriel sont vérifiés pour tous les éléments de E, donc *a fortiori* pour les éléments de F. □

Application 1 Ceci permet de voir, pour ne reprendre que le dernier des exemples précédents, que $(\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$ (pour I une réunion d'intervalles non triviaux) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

II Opérations sur les sevs

II.1 Intersection de sevs

Théorème 4 .

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sevs de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sev de E.

DÉMONSTRATION. Notons $F = \bigcap_{i\in I} F_i$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.

• Pour tout indice $i \in I$, F_i est un sous-espace vectoriel et comprend donc 0_E. Le vecteur nul appartient donc à tous les F_i, ce qui équivaut à dire qu'il appartient à leur intersection.

• Soient $(u, v) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout indice i, on a $u \in F_i$ et $v \in F_i$ par définition de l'intersection. On a donc $\lambda u + \mu v \in F_i$ puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E. Ainsi, le vecteur $\lambda u + \mu v$ appartient à tous les F_i, ce qui équivaut à dire qu'il appartient à leur intersection. $\square$

Application 2 $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ (pour I une réunion d'intervalles non triviaux) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

En effet : $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\times} \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$

Remarque 3

Ça marche pas pour $\cup$: Pour l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$:

$$\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}, y \in R\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}x\\0, x \in R\end{pmatrix}\right\}, +, \cdot\right)$$

N'est pas un sev : par exemple, il est pas stable par somme.

II.2 Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition 2 .

Pour n un entier naturel et $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, on appelle <u>somme de $F_1, F_2, \ldots, F_n$</u> l'ensemble $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \{u_1 + u_2 + \cdots + u_n,\ u_1 \in F_1,\ u_2 \in F_2,\ \ldots, u_n \in F_n\}$.

$$F + G = \{f + g, \begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix} \in F \times G\}.$$

Théorème 5 .

Pour n un entier naturel et $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sevs de E, $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est un sev de E.

DÉMONSTRATION. Pour $n = 2$ pour faire simple (mais la preuve est la même).

• On a $0_E \in F_1$ car F_1 est un sous-espace vectoriel de E, et $0_E \in F_2$ car F_2 est un sous-espace vectoriel de E, donc $0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2$.

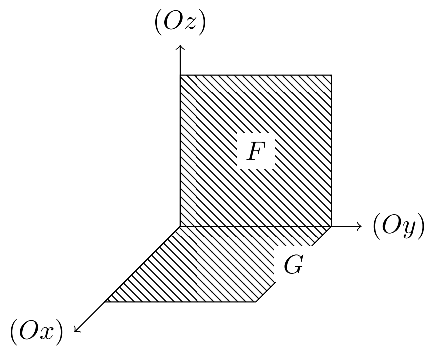
• Soient u et v deux vecteurs de $F_1 + F_2$ et λ et μ deux scalaires. Par définition, il existe u_1 et v_1 dans F_1, et u_2 et v_2 dans F_2 tels qu'on ait $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$. Comme F_1 est un sous-espace vectoriel on a $\lambda u_1 + \mu v_1 \in F_1$; comme F_2 est un sous-espace vectoriel on a $\lambda u_2 + \mu v_2 \in F_2$. Finalement on a $\lambda u + \mu v = (\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2) \in F_1 + F_2$ par définition. $\square$

Remarque 4 La somme des sevs est :

- Idempotente : pour tout sev F de E, on a $F + F = F$;
- Commutative : pour tous sevs F et G de E, on a $F + G = G + F$;
- Associative : pour tous sevs F, G et H de E, on a $(F + G) + H = F + (G + H) = F + G + H$;
- Admet pour élément neutre le sous-espace nul : pour tout sev F de E, on a $F + \{0_E\} = \{0_E\} + F = F$.

DÉMONSTRATION. Tout est $\mathbb{T}\ \mathbb{R}\ \mathbb{I}\ \mathbb{V}\ \mathbb{I}\ \mathbb{A}\ \mathbb{L}$. Exercice, si tu y tiens. $\square$

Exemple 9



Montrons que $F + G = \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
F+G &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, (y',z') \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y+y' \\ z' \end{pmatrix}, (x,y,y',z') \in \mathbb{R}^4 \right\} \\
&\supset \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \qquad \text{cas particulier } y' = 0 \\
&= \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

.

Par ailleurs, $F + G \subset \mathbb{R}^3$ est toujours vrai. (car c'est un sev de $\mathbb{R}^3$)
Par double inclusion, $F + G = R^3$.

Remarque 5

$(Ox) + (Oy) = F$

II.3 Sommes directes

Définition 3 .

Une somme $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est dite directe lorsque tout vecteur u de F s'écrit **de façon unique** sous la forme $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ où l'on a $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ u_i \in F_i$. On note alors $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Ainsi, lorsqu'on écrit une expression de la forme $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$, on décrit un objet (la somme des sous-espaces vectoriels F_i), **et**, simultanément, on donne une information sur cet objet (le fait que cette somme est directe). On a rencontré une situation totalement analogue avec l'exemple des réunions disjointes, entre autres.

Exemples 10 *Reprenons l'exemple de somme vue précédemment.*

$F + G = \mathbb{R}^3$ n'est pas une somme directe.

En effet, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Remarque 6

Une somme de **2** sevs (et pas plus) et directe ssi leur intersection est le sev nul.

Un autre exemple :

Exemple 11

$(Ox) + (Oy) = F$ est directe :

Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \in F$. Considérons une décomposition de $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ dans la somme :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}}_{\in(Ox)} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}}_{\in(Oy)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= a \\ y &= b \end{cases}\right).$$

D'où l'unicité du couple (a, b)

$(Ox) + (Oy) + (Oz) = \mathbb{R}^3$ est directe, par raisonnement analogue.

$\mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R} \cdot 1 \oplus \mathbb{R} \cdot X \oplus \ldots \oplus \mathbb{R} \cdot X^n$

$\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_n[X] \oplus X^{n+1}\mathbb{R}[X]$

$P(X) = \underbrace{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n}_{\mathbb{R}_n[X]} + \underbrace{a_{n+1}X^{n+1} + \ldots + a_dX^d}_{X^{n+1}\mathbb{R}[X]}$

Théorème 6 .

Une somme $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est dite directe si et seulement si l'unique décomposition du vecteur nul dans la somme est $0_E = 0_{F_1} + \cdots + 0_{F_n}$.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que la somme $F_1+F_2+\cdots+F_n$ soit directe. On a évidemment $0_E = 0_E+0_E+\cdots+0_E$ et donc, par unicité d'une décomposition, si on a $0_E = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ on a $u_1 = u_2 = \cdots = 0_E$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons avoir : $\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n, 0_E = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \Rightarrow u_1 = u_2 = \cdots = 0_E$. Montrons que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe. Soit $x \in F_1 + F_2 + \cdots + F_n$. Supposons avoir deux décompositions $x = x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$ de x, avec pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ $x_i \in F_i$ et $y_i \in F_i$. On a $0_E = x - x = (x_1 - y_1) + \cdots + (x_n - y_n)$ par associativité. Par hypothèse, on a donc $x_1 - y_1 = \cdots = x_n - y_n = 0_E$, c'est-à-dire $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i = y_i$. On vient de voir que pour tout élément de $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ on avait unicité d'une décomposition, c'est-à-dire que la somme est directe. □

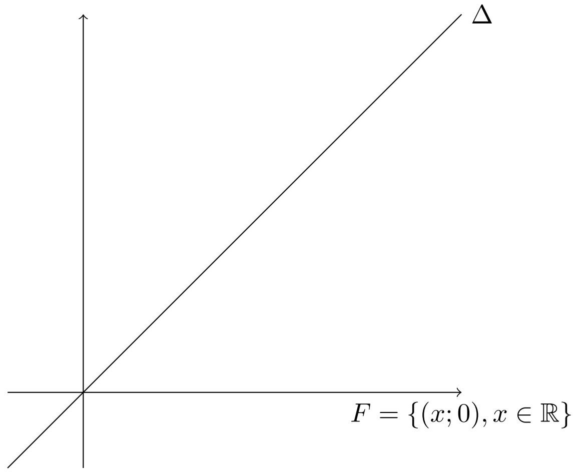
II.4 Supplémentaires

Définition 4 .

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dit supplémentaires lorsqu'on a $F \oplus G = E$.

/!\ Confonds « supplémentaires » et « complémentaires » et je te mort-subite : y'a pas le neutre dans le complémentaire, c'est pas un sev.

Exemple 12 On admet (exercice bonus) que $F = \left\{ \binom{x}{0},\ x \in \mathbb{R} \right\}$ est un sev de $E = \mathbb{R}^2$, muni de ses lois usuelles. Déterminons un supplémentaire de F.



Montrons $F \oplus \Delta = \mathbb{R}^2$ On veut montrer :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists! (u,v) \in F \times \Delta, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u + v.$$

L'existance correspond au fait que la somme fait $\mathbb{R}^2$, l'unicité correspond au fait que la somme est directe.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Montrons que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}}_{\in \Delta}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b & = x \\ 0 + b & = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = x - y \\ b & = y \end{cases}$$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a bien une unique décomposition qui est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x - y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}}_{\in \Delta}$.

Un autre supplémentaire est $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$

/!\ En général, un supplémentaire n'est pas unique !

La méthode naturelle pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont supplémentaires consiste à procéder par analyse-synthèse. Il s'agit en effet de montrer que tout vecteur $x \in E$ peut se décomposer de façon unique comme somme d'un vecteur $y \in F$ et d'un vecteur $z \in G$. Dans la partie analyse, on montre qu'on a un unique candidat pour le couple (y,z). Dans la partie synthèse, on vérifie que ce couple convient bien.

Exemple 13 Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, muni de ses lois usuelles, les ensembles $P = \{ f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \}$ et $I = \{ f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \}$ sont des sevs, et ils sont supplémentaires.

On a déjà essentiellement montré ce résultat ! Recommençons. Soit $f \in \mathbb{R}^2$.

Analyse Considérons un couple $(f_p, f_i) \in P \times I$ convenable, ie tel que $f = f_p + f_i$ ie tq $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f_p(x) + f_i(x)$
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} f(x) & = f_p(x) + f_i(x) = f_p(x) + f_i(x) \\ f(-x) & = f_p(-x) + f_i(x) = f_p(x) - f_i(x) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + f(-x) & = 2f_p(x) \\ f(x) - f(-x) & = 2f_i(x) \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} f_p(x) & = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ f_i(x) & = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

Synthèse On veut montrer :

— $f = f_p + f_i$: OK !

— $f_p \in P$

— $f_i \in I$

$$\begin{aligned} f_p(-x) &= \frac{f(-x) + f(- - x)}{2} \\ &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ &= f_p(x) \\ \implies & f_p \in P \\ f_i(-x) &= \frac{f(-x) - f(- - x)}{2} \\ &= -\frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &= -f_i(x) \\ \implies & f_i \in I. \end{aligned}$$

Conclusion Tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $f = f_p + f_i$ avec $\begin{cases} f_p & \in P \\ f_i & \in I \end{cases}$ donc $P \oplus I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ie P et I sont supplémentaires .

Exemple 14 On se place dans $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni des lois usuelles. Montrons que $F = \left\{ f \in E,\ \int_0^1 f = 0 \right\}$ et $G = \left\{ x \mapsto K,\ K \in \mathbb{R} \right\}$ sont des sous-espaces vectoriels, et qu'ils sont supplémentaires.

F est un sev

— $\int_0^1 f = \int_0^1 0 = 0 \implies 0 \in F \implies F \neq \emptyset$

— Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $\int_0^1 \lambda f + \mu g = \lambda \int_0^1 f + \mu \int_0^1 g = \lambda 0 + \mu 0 = 0 \in F$

G est un sev

— $x \mapsto 0 \in G \implies G \neq \emptyset$

— Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $\lambda(x \mapsto K_2) + \mu(x \mapsto K_2) = x \mapsto \lambda K_2 + \mu K_2 \in G$

Montrer F et G supplémentaires Par analyse-synthèse. Soit $h \in E$.
Analyse Considérons une décomposition de h sous la forme $h = f + g$ avec $\begin{cases} f \in F \\ g \in G \end{cases}$ ie $\begin{cases} \int_0^1 f & = 0 \\ \text{il existe } K \in \mathbb{R},\ g & = x \mapsto K \end{cases}$.

$$\begin{aligned} h &= f + g = f + K \\ \implies \int_0^1 h &= \int_0^1 f + \int_0^1 K \\ &= K \\ \Leftrightarrow g &= x \mapsto \int_0^1 h \\ \implies f &= h - g \\ &= x \mapsto h(x) - \int_0^1 h \end{aligned}$$

<u>Synthèse</u> Testons notre candidat $\begin{cases} f & = x \mapsto h(x) - \int_0^1 h \\ g & = x \mapsto \int_0^1 h \end{cases}$. On devrait montrer

- $f + g = h$
- $g \in G$ ie g constante
- $f \in F$ ie $\int_0^1 f = 0$

$$\begin{aligned} f + g &= x \mapsto h(x) - \int_0^1 h + \int_0^1 h \\ &= x \mapsto h(x) \\ &= h \end{aligned}$$

.

$$g = x \mapsto \int_0^1 h$$

c'est une constante.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f &= \int_0^1 \left(h(x) - \int_0^1 h \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 h(x) \, \mathrm{d}x - \int_0^1 \left(\int_0^1 h \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 h - \int_0^1 h \\ &= 0 \end{aligned}$$

.

<u>Conclusion</u> $F \oplus G = E$

On peut aussi faire ça :

Proposition 1 : Caractérisation de supplémentarité.

Deux sevs F et G de E sont supplémentaires si et seulement si $\begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$.

Exemple 15 Reprenons l'exemple 12. On prend $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$.

$$F+G=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix},x\in R\right\}+\left\{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix},y\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
.

De plus,

$$\begin{aligned}F\cap G&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}(x,y)\in F\\(x,y)\in G\end{cases}\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}x&=0\\y&=0\end{cases}\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$
.

III D'autres méthodes pour obtenir des $\mathbb{K}$-evs

La notion de sous-espace vectoriel et les opérations sur les sous-espaces vectoriels permettent d'obtenir des espaces vectoriels « plus petits »à partir d'espaces vectoriels déjà connus. Voyons maintenant comment obtenir des espaces vectoriels « plus gros ».

III.1 Produits de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Théorème 7 : Produit de $\mathbb{K}$-ev.
Soient $n\in\mathbb{N}$ et E_1, E_2, …, E_n des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel donnée par les opérations composante par composante :
- $0_{E_1\times\cdots\times E_n}=(0_{E_1},\dots,0_{E_n})$;
- $\forall(u_1,\dots,u_n),(v_1,\dots,v_n)\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_n,\ (u_1,\dots,u_n)+(v_1,\dots,v_n)=(u_1+v_1,\dots,u_n+v_n)$;
- $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall(u_1,\dots,u_n)\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_n,\ \lambda\cdot(u_1,\dots,u_n)=(\lambda u_1,\dots,\lambda u_n)$.

Démonstration. $\mathbb{T}\ \mathbb{R}\ \mathbb{I}\ \mathbb{V}\ \mathbb{I}\ \mathbb{A}\ \mathbb{L}$. □

Exemple 16

$$\mathbb{K}^n=\mathbb{K}\times\ldots\times\mathbb{K}.$$

III.2 Espaces vectoriels engendrés

Lemme 1 : CL de CL.
Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev et $P\subset E$. Si un vecteur u de E peut s'obtenir comme CL de vecteurs pouvant eux-même s'obtenir comme CL de vecteurs de P, alors u est lui-même une CL de vecteurs de P.

En abrégé : « une CL de CL est une CL ».

Démonstration. Soient v_1, …, v_r des vecteurs obtenus comme CL des vecteurs de P et u un vecteur obtenu comme CL des v_j (qu'on a supposé en nombre fini puisqu'une CL est toujours une somme finie).

Comme une CL est toujours une somme finie, chaque v_j est lui-même obtenu en ne considérant qu'un nombre fini de vecteurs de P, et comme il n'y a qu'un nombre fini de vecteurs v_j, seulement un nombre fini de vecteurs de P interviennent dans toutes les CL considérées. Notons-les u_1, …, u_n.

L'hypothèse exprime que pour tout $j\in\{1,\dots,m\}$, il existe des scalaires $\alpha_{j,1}$, …, $\alpha_{j,n}$ tels que $v_j=\alpha_{j,1}u_1+\cdots+\alpha_{j,n}u_n$.

De même, il existe un r-uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ tel que $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} u & = & \lambda_1(\alpha_{1,1}u_1 + \dots + \alpha_{1,n}u_n) + \dots + \lambda_r(\alpha_{r,1}u_1 + \dots + \alpha_{r,n}u_n) \\ & = & (\lambda_1\alpha_{1,1} + \dots + \lambda_r\alpha_{r,1})u_1 + \dots + (\lambda_1\alpha_{1,n} + \dots + \lambda_r\alpha_{r,n})u_n \\ & = & \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_n u_n, \end{array}$$

en notant, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\gamma_i = (\lambda_1\alpha_{1,i} + \dots + \lambda_r\alpha_{r,i})$.
Si bien que w est une CL des vecteurs de $\mathcal{F}$. □

Théorème-définition 8 : Sous-espace vectoriel engendré.

Soit $P \subset E$ et F un sous-espace vectoriel de E. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

— F est le plus petit sous-espace vectoriel (pour l'inclusion) contenant P.

— F est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant P.

— F est l'ensemble des CL des vecteurs de P.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que F est le sous-espace vectoriel engendré par P et on note $F = \mathrm{Vect}\,(P)$.

La première caractérisation est une caractérisation « par le haut ». On voit F à l'aide d'objets « plus gros » que F. La seconde caractérisation est aussi une caractérisation « par le haut », mais plus explicite : F y est construit. La troisième caractérisation est aussi une caractérisation explicite, mais « par le bas » : on construit F à l'aide d'objets « plus petits » que F.

Démonstration. Commençons par noter G l'ensemble des CL des vecteurs de P. On va montrer que G est simultanément l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant P et le plus petit sous-espace vectoriel contenant P, ce qui établira les équivalences proposées.

Montrons tout d'abord que G est bien un sous-espace vectoriel : il suffit pour cela d'établir que G est stable par CL quelconque de vecteurs de G. Or, une CL de vecteurs de G est une CL de CL de vecteurs de P, c'est donc une CL de vecteurs de P d'après le lemme sur les CL de CL (lemme 1), c'est-à-dire un élément de G. Ainsi G est bien stable par CL quelconques, c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E. Remarquons également que G contient P (il suffit de considérer des CL de la forme $1 \cdot u$).

Montrons maintenant que G est le plus petit sous-espace vectoriel contenant P. Comme on a déjà vu que G est un sous-espace vectoriel contenant P, il ne reste qu'à montrer que G est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant P. Tout sous-espace vectoriel contenant P étant stable par CL quelconque, un tel sous-espace vectoriel contient toute CL des vecteurs de P. Autrement dit, un tel sous-espace vectoriel contient G, c'est-à-dire que G est bien inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant P.

Montrons enfin que G est l'intersection des sous-espaces vectoriels contenant P. On a déjà vu que G est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant P, il est donc inclus dans l'intersection de tous ces sous-espaces vectoriels. Comme G est lui-même un sous-espace vectoriel de E contenant P, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant P est incluse dans G. Finalement, par double inclusion, G est égal à l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant P. □

Exemples 17

1. On a admis plus haut que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$ est un sev de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. C'est maintenant évident.
   En effet, F est $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \} = \{ x e_1, x \in \mathbb{R} \} = \{ \text{CL des vecteurs de } \{e_1\} \} = \left(\ \{e_1\} \ \right)$.
2. On a admis plus haut que $G = \left\{ x \mapsto K,\ K \in \mathbb{R} \right\}$ est un sev de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), +, \cdot)$. C'est maintenant évident.
   En effet, G est $\{ x \mapsto K, K \in \mathbb{R} \} = \left(\ \{ x \mapsto 1 \} \ \right)$.
3. On a vu plus haut la partie $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \right\}$ de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Quel est le sev engendré par B ?

$$\mathrm{Vect}\,(B) = \mathrm{Vect}\left(\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \} \right) = \mathbb{R}^3.$$

— $\mathrm{Vect}\,(B) \subset \mathbb{R}^3$ par définition

— Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \\ & \in \{\text{CL de Vecteurs de } B\} \\ & = \mathrm{Vect}\,(B) \end{aligned}$$

.

D'où $\mathbb{R}^3 \subset \mathrm{Vect}\,(B)$

4. $\mathrm{Vect}\,(\{x \mapsto 1, \mathrm{id}\}) = \{\text{fonctions affines}\}$

Proposition 2 : Propriétés fondamentales de Vect.

1. Vect est extensive, c'est-à-dire : $\forall P \subset E,\ \mathrm{Vect}\,(P) \supset P$
2. Vect est croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire :$\forall P, Q \subset E,\ Q \subset E, P \subset Q \implies \mathrm{Vect}\,(P) \subset \mathrm{Vect}\,(Q)$
3. Vect est idempotente, c'est-à-dire : $\mathrm{Vect} \circ \mathrm{Vect} = \mathrm{Vect}$

Démonstration. 1. Supposons $P \subset P'$. Tout vecteur de P est un vecteur de P', donc toute CL des vecteurs de P est une CL des vecteurs de P', c'est-à-dire que tout vecteur de $\mathrm{Vect}\,(P)$ est un vecteur de $\mathrm{Vect}\,(P')$

2. L'ensemble $\mathrm{Vect}\,(P)$ est un sous-espace vectoriel. L'ensemble $\mathrm{Vect}\big(\mathrm{Vect}\,(P)\big)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathrm{Vect}\,(P)$, c'est donc $\mathrm{Vect}\,(P)$.

3. L'ensemble $\mathrm{Vect}\,(P)$ est un sous-espace vectoriel, il est donc le plus petit sous-espace vectoriel de E se contenant lui-même. Donc $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{Vect}\,(P)) = \mathrm{Vect}\,(P)$. □

Remarque 7

Pour $P \subset E$, $P = \mathrm{Vect}\,(P) \;\Leftrightarrow P$ est un sev

Exercice 1. Montrons qu'on a, pour tous sevs F_1 et F_2 de E, $F_1 + F_2 = \mathrm{Vect}\,(F_1 \cup F_2)$.
$\boxed{\subset}$ Soit $u \in F_1 + F_2$
Par définition u est de la forme

$$u = \underbrace{u_1}_{\in F_1} + \underbrace{u_2}_{\in F_2} \qquad \text{avec } \begin{cases} v_1 \in F_1 \\ v_2 \in F_2 \end{cases}$$

.

En particulier $\begin{cases} u_1 \in F_1 \cup F_2 \\ u_2 \in F_1 \cup F_2 \end{cases}$.
Donc $u = \underbrace{1}_{\in \mathbb{K}} \cdot \underbrace{u_1}_{\in F_1 \cup F_2} + \underbrace{1}_{\in \mathbb{K}} \cdot \underbrace{u_2}_{\in F_1 \cup F_2}$ est une CL de vecteurs de $F_1 \cup F_2$, donc $u \in \mathrm{Vect}\,(F_1 \cup F_2)$.
$\boxed{\supset}$
Soit $u \in \mathrm{Vect}\,(F_1 \cup F_2)$
Ainsi $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$
À renommage près, $u_1, \ldots, u_r \in F_1$ et $u_{r+1}, \ldots, u_n \in F_2$
On a alors $u = v_1 + v_2$ avec $\begin{cases} v_1 & = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r \in F_1 \qquad \text{car } F_1 \text{ est un sev donc stable par CL} \\ v_2 & = \alpha_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \alpha_n u_n \in F_2 \qquad \text{de même} \end{cases}$
donc $u \in F_1 + F_2$

III.3 $\mathbb{K}$-evs et sevs remarquables

Définition 5 .

1. On appelle droite (vectorielle) un sev de E de la forme $\mathrm{Vect}\,(u)$ avec $u \neq 0_E$.
2. On appelle plan (vectoriel) un sev de E de la forme $\mathrm{Vect}\,(u, v)$ avec u et v non colinéaires, c'est-à-dire tel qu'aucun des deux n'est un multiple de l'autre.

Exemples 18

— $(Ox) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$

— $(Oy) = \mathrm{Vect}\,(e_2)$

— $\Delta = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

— $\{t \mapsto K,\ K \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto 1)$

— $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, (a, d) \in \mathbb{K}\right\} = \{\text{matrices } 2 \times 2 \text{ diagonales}\}$ est un plan (vectoriel)

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ 2a-b \\ a+2b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{non colinéaires}} \right) \qquad \text{c'est un plan vectoriel} \end{aligned}$$

.

$$
\begin{aligned}
F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x - 2y + z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, z = -x + 2y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+2y \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{non } //} \right) \qquad \text{c'est un plan vectoriel}
\end{aligned}
$$
.

Définition 6 .

On appelle hyperplan de E un sev de E dont un supplémentaire est une droite.

Exemples 19 Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\underbrace{\operatorname{Vect}(1,X)}_{\mathbb{R}_1[X]}$ est un hyperplan car un supplémentaire de ce sev est $\operatorname{Vect}\left(X^2\right)$

Montrons-le avec la Proposition 1.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Vect}(1,X) + \operatorname{Vect}\left(X^2\right) &= \left\{a + bX, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} + \left\{cX^2, c \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{ cX^2 + bX + a, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \mathbb{R}_2[X]
\end{aligned}
$$
.

$$
\operatorname{Vect}(1,X) \cap \operatorname{Vect}\left(X^2\right) = ?
$$
.

Soit $P \in \operatorname{Vect}(1,X) \cap \operatorname{Vect}\left(X^2\right)$

On a $P \in \operatorname{Vect}(1,X)$ donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX + b$ On a $P \in \operatorname{Vect}\left(X^2\right)$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P = cX^2$

Donc

$$
\begin{aligned}
& cX^2 = aX + b \\
\Leftrightarrow\ & cX^2 + aX + b = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} c &= 0 \\ -a &= 0 \\ -b &= 0 \end{cases} \\
\implies\ & P = 0
\end{aligned}
$$
.

Donc $\mathrm{Vect}\,(1, X) \cap \mathrm{Vect}\,(X^2) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$
$\square$