Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Sevs en dimension finie

I.1 Propriété fondamentale

Théorème 1 : Propriété fondamentale des sevs en dimension finie.

Supposons que E soit de dimension finie n, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$;
2. $\dim F = n$ si et seulement si $F = E$.

Remarque 1

Ce théorème a un **analogue ensembliste** : si A est un ensemble fini et B un ensemble tel que $B \subset A$ alors B est fini et $|B| \leqslant |A|$, avec égalité si et seulement si $A = B$. **Remarque 2**

• L'application "dimension" dim : {sous-espaces vectoriels de E} $\to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est donc croissante (pour l'inclusion).
• L'application "rang" rg : {familles de vecteurs de E} $\to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est donc une application croissante (pour la relation « être un sous-famille de ») puisque c'est $\dim \circ \mathrm{Vect}$.

I.2 Application aux supplémentaires

Théorème 2 .

Supposons que E soit de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. F a un supplémentaire ;
2. pour tout supplémentaire G de F on a $\dim G = \dim E - \dim F$.

Remarque 3

Ce théorème a aussi un **analogue ensembliste** : si $B \amalg C = A$ avec A fini, alors $|B| + |C| = |A|$.

II Applications de la formule de Grassmann

II.1 Formule de Grassmann

Théorème 3 : Formule de Grassmann.

Supposons E de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Remarque 4

On a là encore un **analogue ensembliste** : si $B, C \subset A$ avec A fini alors $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$. **Remarque 5**

On retrouve qu'on a $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

II.2 Applications

Théorème 4 .

Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$.

Théorème 5 : Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.

Supposons que E soit de dimension finie n. Soient F, G deux sevs de E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

i/ $F \oplus G = E$;

ii/ $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$;

iii/ $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$.

Théorème 6 : Dimension d'une somme de m sevs.

Soient $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E, supposé de dimension finie.

Alors on a : $\dim\left(\sum_{i=1}^{m} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i)$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

II.3 Hyperplans en dimension finie

Théorème 7 .

Supposons $\dim(E) = n < +\infty$. Alors un hyperplan de E est exactement un sev de E de dimension $n-1$.

Théorème 8 .

Supposons E de dimension finie n. Soient $H_1, H_2, \ldots, H_m$ des hyperplans de E.

Alors on a $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_m) \geqslant n - m$.

Remarque 6

Soit $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Alors $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

Théorème 9 .

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,\ \left\| \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{array} \right. \right\}$ forme un sev de $\mathbb{K}^n$ de dimension supérieure à $n - m$.