Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Sevs en dimension finie

I.1 Propriété fondamentale

Théorème 1 : Propriété fondamentale des sevs en dimension finie.

Supposons que E soit de dimension finie n, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$;
2. $\dim F = n$ si et seulement si $F = E$.

Remarque 1

Ce théorème a un **analogue ensembliste** : si A est un ensemble fini et B un ensemble tel que $B \subset A$ alors B est fini et $|B| \leqslant |A|$, avec égalité si et seulement si $A = B$.

Démonstration.

1. — S'il n'y a pas d'autre vecteur dans F que le vecteur nul alors $F = \{0_E\}$ admet pour seule base la famille vide. Ainsi F est de dimension finie et $\dim(F) = 0$. En particulier, comme la dimension est un entier naturel, $\dim(F) = 0 \leqslant \dim(E)$.

   — Si F possède au moins un vecteur non nul, alors on en choisit un, que l'on note f_1.

     — Si $F = \mathrm{Vect}(f_1)$, alors (f_1) est une base de F et on arrête le processus (on a alors $\dim(F) = 1$). Sinon on prend $f_2 \in F$ de sorte que (f_1, f_2) soit libre.

     — Si $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, on arrête le processus ; sinon on prend $f_3 \in F$ tel que (f_1, f_2, f_3) soit libre, etc.

   Ce processus s'arrête au plus tard au bout de n étapes puisque dans E il n'y a pas de famille libre de cardinal $n + 1$. Et donc $\dim F \leqslant n = \dim E$.
   Si on est allé au bout des n étapes, c'est qu'on a trouvé une famille libre d'éléments de F de cardinal n, donc une base de E. On a alors $F = E$.
2. Comme le montre la fin du raisonnement, on a $\dim(F) = n$ si et seulement si $F = E$. □

Remarque 2

• L'application "dimension" $\dim : \{\text{sous-espaces vectoriels de } E\} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est donc croissante (pour l'inclusion).
• L'application "rang" $\mathrm{rg} : \{\text{familles de vecteurs de } E\} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est donc une application croissante (pour la relation « être un sous-famille de ») puisque c'est $\dim \circ \mathrm{Vect}$.

I.2 Application aux supplémentaires

Théorème 2 .

Supposons que E soit de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. F a un supplémentaire ;
2. pour tout supplémentaire G de F on a $\dim G = \dim E - \dim F$.

Autrement dit, en dimension finie, un supplémentaire existe toujours et, s'il n'est pas unique, on peut tout de même dire que sa dimension est unique.

Remarque 3

Ce théorème a aussi un **analogue ensembliste** : si $B \amalg C = A$ avec A fini, alors $|B| + |C| = |A|$.

Démonstration. D'après la propriété fondamentale, F est de dimension finie $p \leqslant n$. On prend une base $\mathcal{B}_F$ de F et on la complète par TBI en base $\mathcal{B}_F \sqcup \mathcal{B}_G$ de E. D'après le théorème sur les bases adaptées $\mathcal{B}_G$ est une base d'un supplémentaire de F et $\mathcal{B}_G$ a pour cardinal $\dim(E) - \mathrm{card}(\mathcal{B}_F) = n - p$.

□

II Applications de la formule de Grassmann

II.1 Formule de Grassmann

Théorème 3 : Formule de Grassmann.

Supposons E de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors on a :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Remarque 4

On a là encore un **analogue ensembliste** : si $B, C \subset A$ avec A fini alors $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$.

Démonstration. $F \cap G$ est un sev de E donc est de dimension finie $m < n$.
Considérons une base $(u_1, \dots, u_m)$ de $F \cap G$.

— Par TBI, on peut compléter en base de $F = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_r)$ et aussi en base de $G = (u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_s)$

— Montrons que $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s)$ est une base de $F + G$.

Caractère générateur Soit $x \in F + G$. Ainsi il existe $(\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G$ tel que $x = f + g$ Par hypothèse, f peut s'écrire sous la forme

$$f = \alpha u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s$$

De même,

$$g = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m + \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_s w_s$$

Donc

$$\begin{aligned} f + g &= (\alpha_1 + \lambda_1) u_1 + \cdots + (\alpha_m + \lambda_m) u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r + \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_s w_s \\ &\in \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s) \end{aligned}$$

Liberté Considérons une CL nulle

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r + \lambda_1 w_1 + \cdots \lambda_s w_s &= 0_E \\ i.\,e.\ \underbrace{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \cdots \beta_r v_r}_{\in F} &= \underbrace{-\lambda_1 w_1 - \cdots - \lambda_s w_s}_{\in G} \end{aligned}$$

Donc cette quantité est dans $F \cap G = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_p)$

Donc il existe $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ tel que

$$\begin{aligned} -\lambda_1 w_1 - \cdots - \lambda_s w_s &= \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_p u_p \\ \textit{i. e.} \qquad \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \gamma_k u_k + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k w_k}_{\text{CL des vecteurs d'une base de } G \text{ docn libre}} &= 0_E \end{aligned}$$

Par liberté $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s = 0$ (et les γ aussi). Or

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k + \sum_{k=1}^{r} \beta_k v_k}_{\text{CL de vecteurs d'une base de } F \text{ donc libre}} = 0_E$$

Donc par liberté

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$$

Bilan

$$\begin{cases} \dim F + G &= p + r + s \\ \dim F \cap G &= p \\ \dim F &= p + r \\ \dim G &= p + r \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) &= p + r + p + r - p \\ &= p + r + s \\ &= \dim(F + G) \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 5

On retrouve qu'on a $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

II.2 Applications

Théorème 4 .

Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$.

Démonstration. Notons $F = E_1 \times \{0_{E_2}\}$ et $G = \{0_{E_1}\} \times E_2$. On a $\dim(F) = \dim(E_1)$, $\dim(G) = \dim(E_2)$ et $E_1 \times E_2 = F \oplus G$, d'où le résultat. $\square$

Théorème 5 : Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.

Supposons que E soit de dimension finie n. Soient F, G deux sevs de E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

i/ $F \oplus G = E$;

ii/ $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$;

iii/ $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$.

L'implication intéressante est ii/⇒i/ car c'est elle qui permet d'établir simplement que deux sevs sont supplémentaires.

Démonstration. On utilise l'équivalence $F \oplus G = E \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F+G=E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{array} \right.$.

- Les implications i/⇒ii/ et i/⇒iii/ reformulent donc la remarque 5 (ou le théorème 2).
- Montrons ii/⇒i/.
  On suppose $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim E$.
  Il reste à montrer $F + G = E$.

$$\begin{aligned} \dim(F+G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) && \text{D'après Grassmann} \\ &= \dim F + \dim G - \dim\{0_E\} && \text{par hypothèse} \\ &= \dim E \end{aligned}$$

  donc $F + G$ est un sev de E de même dimension que E,
  donc d'après la propriété fondamentale sur les sevs en dimension finie, on a bien $F + G = E$.
- Montrons iii/⇒i/. On suppose $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$.
  Il reste à montrer $F \cap G = \{0_E\}$.

$$\begin{aligned} \dim(F+G) &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) && \text{d'après Grassman} \\ \textit{i. e.}\ \dim(F \cap G) &= \dim F + \dim G - \dim(F+G) \\ &= \dim E - \dim E \\ &= 0 \end{aligned}$$

  D'où $F \cap G = \{0_E\}$

□

Exemple 1 Notons $F = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$.

Retrouvons rapidement que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc F est un sev et $\dim F = 1$

$$\begin{aligned}
G &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -x_1 - x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} \right)
\end{aligned}$$

Donc G est un sev et $\dim G = n-1$
Or

$$\begin{aligned}
F \cap G &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix},\ \lambda + \cdots + \lambda = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \dim F + \dim G &= 1 + n \cdot 1 = n = \dim \mathbb{R}^n \\ F \cap G &= \{0_{\mathbb{R}^n}\} \end{cases}$$

Donc $F \oplus G = \mathbb{R}^n$ d'après la caractérisation des supplémentaires en dimension finie.

Exemple 1 bis

$$\begin{aligned}
E &= \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\
F = \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
G = \mathcal{S}_4(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ c & f & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \right\}
\end{aligned}$$

Montrons que $F \oplus G = E$ (Généralisation d'un exercice de la feuille)
On pourrait le faire par A-S, mais on peut utiliser le théorème de caractérisation

Unicité de la somme

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), {}^t M = M = -M\} \\
&= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), M = -M\} \\
&= \{0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\}
\end{aligned}$$

Caractère générateur

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &= \dim \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= 3 \quad \text{car } \dim \circ \operatorname{Vect} (=) \operatorname{rg} \text{ et les trois matrices sont linéairement indépendantes}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) &= \dim \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= 6\end{aligned}$$

$$\dim \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) = 3 + 6 = 9 = \dim E$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) & = E \\ \dim \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) & = \dim E \end{cases} \quad \text{donc } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{par théorème théorème de caractérisation}$$

Théorème 6 : Dimension d'une somme de m sevs.

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E, supposé de dimension finie.

Alors on a : $\dim\left(\sum_{i=1}^{m} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i)$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Démonstration. La démonstration fait l'objet d'un exercice guidé de la feuille d'exercices.

$$\begin{aligned}\dim(F+G) &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \\ &\le \dim F + \dim G\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim(F+G+H) &= \dim((F+G)+H) \\ &= \dim(F+G) + \dim H - \dim((F+G) \cap H) \\ &\le \dim(F+G) + \dim H \\ &\vdots \quad \text{par récurrence}\end{aligned}$$

Attention, ce qui suit est faux

$$\begin{aligned}\dim(F+G+H) &= \dim F + \dim G + \dim H \\ &= \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H)\end{aligned}$$

c'est faux !

□

II.3 Hyperplans en dimension finie

Théorème 7 .
Supposons $\dim(E) = n < +\infty$. Alors un hyperplan de E est exactement un sev de E de dimension $n-1$.

DÉMONSTRATION.

• Si H est un hyperplan, il a pour supplémentaire une droite D et

$$\begin{aligned} n &= \dim(E) \\ &= \dim(H \oplus D) \\ &= \dim(H) + \dim(D) \\ &= \dim(H) + 1 \end{aligned}$$

• Si $\dim(H) = n-1$ alors d'après le théorème 2 H a un supplémentaire D et $\dim(D) = n-(n-1) = 1$ donc D est une droite, et donc H est un hyperplan. □

On remarque que le théorème 2 montre que **tout** supplémentaire d'un hyperplan est une droite (alors que la définition qu'on a donnée était qu'il existe un supplémentaire qui est une droite).

Théorème 8 .
Supposons E de dimension finie n. Soient $H_1, H_2, \dots, H_m$ des hyperplans de E.
Alors on a $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m) \geqslant n-m$.

DÉMONSTRATION. La démonstration fait l'objet d'un exercice guidé de la feuille d'exercices. □

On s'intéresse maintenant aux hyperplans de $\mathbb{K}^n$ pour faire le lien avec les ensembles de solutions d'un système homogène.

Remarque 6

Soit $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Alors $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

DÉMONSTRATION. On suppose $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi il existe i tel que $a_i \neq 0$.

$$\begin{aligned}
H &= \{(x_1,\dots,x_n),\ a_1x_1+\dots+\underbrace{a_ix_i}_{0}+\dots\} \\
&= \{(x_1,\dots,x_n),\ x_i = -\frac{a_1}{a_i}x_1-\dots-\frac{a_n}{a_i}\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ \sum_{j\neq i}^{n} -\frac{a_j}{a_i} \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n-1} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_1}{a_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_2}{a_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ -\frac{a_n}{a_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} \right)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\dim H = n-1$$

Donc H est bien hyperplan.

□

Théorème 9 .

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \ \middle\| \ \begin{matrix} a_{1,1}x_1+\dots+a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1+\dots+a_{m,n}x_n = 0 \end{matrix} \right\}$ forme un sev de $\mathbb{K}^n$ de dimension supérieure à $n-m$.

Démonstration. Il peut éventuellement y avoir des lignes de la forme $0=0$ si tous les $a_{i,j}$ de la ligne sont nuls. Notons $M \leqslant m$ le nombre de lignes qui n'est pas de cette forme. Ainsi H est l'intersection de M hyperplans de $\mathbb{K}^n$ d'après la remarque précédente et donc est de dimension supérieure à $n-M$ qui est lui-même supérieur à $n-m$. □

Exercice bonus : montrer que cette dimension est exactement $n-m$ ("les équations sont indépendantes") si et seulement si $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = m$. *Indication : voir ce rang comme un rang "par lignes".*