1

1.1

D'après la propriété fondamentale des ALs, toute forme linéaire est de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

1.2

$$\phi : \begin{cases} E & \to E^* \\ u & \mapsto \phi_u = \langle u, \cdot \rangle \end{cases}$$

est bien définie, linéaire, entre espaces de dimension n

On veut montrer que ϕ est surjective Par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, il suffit de montrer qu'elle est *injective* .

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \phi &= \{u \in E, \phi_u = 0_E\} \\ &= \{u \in E, \forall x \in E, \phi_u(x) = 0\} \\ &= \{u \in E, \forall x \in E, \langle u, x \rangle = 0\} \\ &= E^{\perp} \\ &= \{0_E\} && \text{par caractérisation des finis} \end{aligned}$$

Donc ϕ est injective

1.3

On obtient que tout forme linéaire $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de la forme $M \mapsto \operatorname{Tr}({}^tU \times M)$ pour $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *i.e.*de la forme $M \mapsto \operatorname{Tr}(AM)$ pour une certaine matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

En particulier, *tout hyperplan de* $\mathcal{M}_n(R)$ est de la forme

$$H_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{Tr}(AM) = 0\}$$

Pour une matrice A *non-nulle*

D'après un théorème du cours, A peut s'écrire sous la forme

$$A = PJ_rQ \qquad \text{avec} \begin{cases} r & \in [1, n] \\ P, Q & \text{inversibles} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M \in H_A &\iff \operatorname{Tr}(AM) = 0 \\ &\iff \operatorname{Tr}(PJ_rQM) = 0 \\ &\iff \operatorname{Tr}(J_r \underbrace{QMP}) = 0 \end{aligned}$$

Lemme Il existe N *inversible* telle que $\mathrm{Tr}(J_r N) = 0$

On prend

$$N = \begin{pmatrix} \overbrace{\underset{\frac{1}{2}}{1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

On a

$$J_r N = \left(\text{diagonale: } \overbrace{\underset{\frac{1}{2}}{1 \ldots 1}} \overbrace{\underset{\frac{1}{2}}{-1 \ldots -1}} 0 \ldots 0\right) \text{ donc } \mathrm{Tr}(J_r N) \qquad = 0$$

$$\text{et } \det N = (-1)^{n-\frac{r}{2}} = 0$$

Pour $n \in 2\mathbb{N}+1$ On prend

$$N = \left(\text{diagonale: } 2\, \overbrace{\underset{\frac{r-1}{2}}{1 \ldots 1}} \overbrace{\underset{\frac{r+1}{2}}{-1 \ldots -1}} -1 \ldots -1\right)$$

On a

$$J_r N = \left(\text{diagonale: } 2\, \overbrace{\underset{\frac{r-1}{2}}{1 \ldots 1}} \overbrace{\underset{\frac{r+1}{2}}{-1 \ldots -1}} 0 \ldots 0\right)$$

$$\text{donc } \mathrm{Tr}(J_r N) = 0$$

$$\text{et } \det N = 2(-1)^{n-\frac{r+1}{2}} \neq 0$$

Pour $M = Q^{-1} N P^{-1}$ On a M inversible comme produit d'inversibles, et

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(AM) &= \mathrm{Tr}(P J_r \cancel{Q Q^{-1}} N P^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(J_r N \cancel{P P^{-1}}) \\ &= \mathrm{Tr}(J_r N) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2

2.1

$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \langle P, Q \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} PQ$

Montrons que c'est un produit Skyler

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$

Symétrie

$$\begin{aligned}\langle P, Q\rangle &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} PQ \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} QP && \text{par commutativité de } \times_{\mathbb{R}[X]}\end{aligned}$$

Bilinéarité Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}[X]$

Montrons seulement la linéarité à gauche, ce qui équivaut à la linéarité par symétrie

$$\begin{aligned}\langle \lambda P + \mu Q, R\rangle &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\lambda P + \mu Q)R \\ &= \lambda \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} PR + \mu \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} QR && \text{par distributivité de } \times \text{ sur } + \text{ et linéarité de } \int \\ &= \lambda \langle P, R\rangle + \mu \langle Q, R\rangle\end{aligned}$$

Positivité

$$\begin{aligned}\langle P, P\rangle &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P^2 \\ &\geq 0 && \text{par positivité de } \int\end{aligned}$$

Caractère défini

$$\begin{aligned}\langle P, P\rangle &= 0 \\ \text{ie } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P^2 &= 0 \\ \iff \text{le polynôme a une infinité de racines sur } [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \iff P &= 0 && \text{sur } [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\end{aligned}$$

2.2

Existance de $\pi \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \langle \pi, P\rangle = P(0)$$

Oui, π existe (et est unique) car $\cdot(0) : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ est une *forme linéaire* sur $\mathbb{R}_3[X]$ qui est *euclidien* donc représentable, *i.e.*$\exists \pi \in \mathbb{R}_3[X], \langle \pi, \cdot\rangle = \cdot(0)$

$$\pi = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

$$
\begin{aligned}
\pi \text{ convient} &\iff \forall P \in \mathbb{R}_3[X], \langle \pi, P \rangle = P(0)\\
&\iff \forall P \in \{1, X, X^2, X^3\}, \langle \pi, P \rangle = P(0) && \text{par linéarité}\\
&\iff \begin{cases} \langle \pi, 1 \rangle & = 1\\ \langle \pi, X \rangle & = 0\\ \left\langle \pi, X^2 \right\rangle & = 0\\ \left\langle \pi, X^3 \right\rangle & = 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \text{ d}t & = 1\\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_3 t^4 \text{ d}t & = 0\\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a_0 t^2 + a_1 t^3 + a_2 t^4 + a_3 t^5 \text{ d}t & = 0\\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a_0 t^3 + a_1 t^4 + a_2 t^5 + a_3 t^6 \text{ d}t & = 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a_0 + 2a_2 \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} & = 1 \qquad \text{par parité de id}\\ 2a_1 \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} + 2a_3 \left[\frac{t^5}{5}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} & = 0\\ 2a_0 \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} + 2a_2 \left[\frac{t^5}{5}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} & = 0\\ 2a_1 \left[\frac{t^5}{5}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} + 2a_3 \left[\frac{t^7}{7}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} & = 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a_0 + \frac{a_2}{12} & = 1\\ \frac{a_1}{12} + \frac{a_3}{80} & = 0\\ \frac{a_0}{12} + \frac{a_2}{80} & = 0\\ \frac{a_1}{80} + \frac{a_3}{64 \cdot 7} & = 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \begin{cases} a_0 + \frac{a_2}{12} & = 1\\ \frac{a_0}{12} + \frac{a_2}{80} & = 0 \end{cases}\\ \begin{cases} \frac{a_1}{12} + \frac{a_3}{80} & = 0\\ \frac{a_1}{80} + \frac{a_3}{64 \cdot 7} & = 0 \end{cases} \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \frac{1}{80} - \frac{1}{12^2} & = \frac{9-15}{9 \cdot 5 \cdot 16}\\ & = \frac{1}{9 \cdot 5 \cdot 4}\\ & = \frac{1}{180}\\ \begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0\\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix} & \iff \begin{pmatrix} a_0\\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}\\ \text{ie } \begin{pmatrix} a_0\\ a_2 \end{pmatrix} & = 180 \begin{pmatrix} \frac{1}{80} & -\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{12} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}\\ & = 180 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{80}\\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix}\\ & = \begin{pmatrix} \frac{180}{80}\\ -\frac{180}{12} \end{pmatrix}\\ & = \begin{pmatrix} \frac{9}{4}\\ -15 \end{pmatrix}\\ \begin{cases} a_1 & = 0\\ a_3 & = 0 \end{cases} & \text{car } \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{64 \cdot 7} - \left(\frac{1}{80}\right)^2 \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Conclusion:

$$\pi = \frac{9}{4} - 15X^2$$

2.3

Montrons que, sur $\mathbb{R}[X]$, il n'existe pas

$$\pi \in \mathbb{R}[X],\ \forall P \in \mathbb{R}[X], \langle \pi, P \rangle = P(0)$$

par l'absurde.

Pour $P = X\pi$ On obtient

$$\begin{aligned} \langle X\pi, \pi \rangle &= (X\pi)(0) = 0 \\ \text{ie} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t\pi(t)\ \mathrm{d}t &= 0 \end{aligned}$$

On prend $P = X^2\pi$

$$\begin{aligned} \left\langle X^2\pi, \pi \right\rangle &= 0 \\ \text{ie} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (t\pi(t))^2\ \mathrm{d}t &= 0 \\ \text{donc } X\pi &= 0 && \text{par caractère défini du produit Skyler} \\ \text{or } X &\neq 0 \\ \text{donc } \pi &= 0 && \text{par intégrité de } \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

$$\text{En particullier } 1 \overbrace{=}^{\text{par déf. de } \pi} \langle \pi, 1 \rangle = \langle 0, 1 \rangle = 0 \quad \text{IMP}$$

3

3.1

Symétrie Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Posons $\langle \cdot, \cdot\cdot \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \cdot \times \cdot\cdot$

$$\begin{aligned} \langle P, Q \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} PQ \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} QP \\ &= \langle Q, P \rangle \end{aligned}$$

Bilinéarité Soit $(\lambda, \mu, P, Q, R) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_3[X]^3$

$$\begin{aligned}\langle \lambda P + \mu Q, R\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\lambda P + \mu Q)R \\ &= \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} PR + \frac{\mu}{2}\int_{-1}^{1} QR \\ &= \lambda \langle P, R\rangle + \mu \langle Q, R\rangle\end{aligned}$$

Ainsi $\langle \cdot, \cdot\cdot \rangle$ est linéaire à gauche. Par symétrie, $\langle \cdot, \cdot\cdot \rangle$ est aussi linéaire à droite. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot\cdot \rangle$ est bilinéaire.

Positivité Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

$$\langle P, P\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P^2 \geq 0 \qquad \text{par positivité de } \int \text{ et de } \frac{1}{2}$$

Caractère défini

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P^2 = 0 \\ &\text{ie } P \quad \text{a une infinité de racines} \\ &\text{ie } P = 0\end{aligned}$$

F est un sev de E de dimension $\dim F = n + 1$ donc fini, alors F est muni de la structure d'espace Euclidien.

3.2

IPP généralisée

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_p := \text{“}\forall f, g \in \mathcal{C}^p([-1, 1], \mathbb{R}),\ \int_{-1}^{1} fg^{(p)} = \dots\text{”}$$

Initialsation ($p = 0$)
Soit $f, g \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\left[\sum_{k=0}^{1}(-1)^k f^{(k)} g^{(p-k-1)}\right]_{-1}^{1} + (-1)^0 \int_{-1}^{1} f^{(0)} g &= \int_{-1}^{1} fg \\ &= \int_{-1}^{1} fg^{(0)}\end{aligned}$$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_p$
Soit $f, g \in \mathcal{C}^{p+1}([-1, 1], \mathbb{R})$
On a bien $f', g' \in \mathcal{C}^p([-1, 1], \mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f g^{(p+1)} &= \left[f g^{(p)}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f' g^{(p)} \\
\int_{-1}^{1} f' g^{(p)} &= \left[\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k f^{(k+1)} g^{(p-k-1)}\right]_{-1}^{1} + (-1)^p \int_{-1}^{1} f^{(p+1)} g \\
\int_{-1}^{1} f g^{(p+1)} &= \left[f g^{(p)} + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+1} f^{(k+1)} g^{(p-k-1)}\right]_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f^{(p+1)} g \\
&= \left[\sum_{k=0}^{p} (-1)^k f^{(k)} g^{(p-k)}\right]_{-1}^{1} + (-1)^{p+1} \int_{-1}^{1} f^{(p+1)} g
\end{aligned}
$$

Conclusion …

3.3

$$
\begin{aligned}
U_k &= ((X^2-1)^k)^{(k)} \\
\deg(X^2-1) &= 2 \\
\text{donc } \deg((X^2-1)^k) &= 2k \\
\text{donc } \deg(((X^2-1)^k)^{(k)}) &= \deg U_k = k
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
X^2-1 &= (X-1)(X+1) & &\text{1 et -1 sont racines de } (X^2-1) \text{ de mult. } 1 \\
(X^2-1)^k &= (X-1)^k(X+1)^k & &\text{1 et -1 sont racines de } (X^2-1) \text{ de mult. } k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
U_k = ((X^2-1)^k)^{(k)} \text{ n'a pas 1 et -1 comme racines} \\
\text{mais pour } i < k \; ((X^2-1)^k)^{(i)} \text{ a 1 et -1 comme racines (de mult. } k-i \text{)}
\end{gathered}
$$

$(U_0, U_1, \dots, U_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car c'est une famille échelonnée en degré
Soient $i \neq j \in [\![0, n]\!]$. ÀRP, $i < j$

$$
\langle U_i, U_j \rangle = ?
$$

$$
\begin{aligned}
2\,\langle U_i, U_j \rangle &= \int_{-1}^{1} \underbrace{U_i}_{\in \mathcal{C}^\infty} \underbrace{U_j}_{\in \mathcal{C}^\infty} \\
&= \int_{-1}^{1} ((X^2-1)^i)^{(i)} ((X^2-1)^j)^{(j)} \; \mathrm{d}X
\end{aligned}
$$

Avec $\begin{cases} p & = j \\ g & = (\mathrm{id}^2 - 1)^j \\ f & = U_i \end{cases}$, d'après la 3.2,

$$2 \langle U_i, U_j \rangle = \left[\sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k f^{(k)} g^{(j-k-1)} \right]_{-1}^{1} + (-1)^j \int_{-1}^{1} f^{(j)} g$$

$i < j$ et $\deg U_i = i$ donc $U_i^{(j)} = f^{(j)} = 0$
donc

$$\int_{-1}^{1} f^{(j)} g = \int_{-1}^{1} 0 \times g = 0$$

et pour $k \in [\![0, j-1]\!]$ on a

$$\begin{cases} r & = j - k - 1 \in [\![0, j-1]\!] \\ g^{(j-k-1)} & = g^{(r)} \\ & = ((\mathrm{id}^2 - 1)^j)^{(r)} \\ & \text{ a -1 et 1 pour racines (de mult. } j - r = k + 1 \text{)} \end{cases}$$

$$\text{donc } \left[\sum_{k=0}^{j-1} f^{(k)} g^{(j-k-1)} \right]_{-1}^{1} = 0$$

d'où $\langle U_i, U_j j \rangle = 0$ car $2 \neq 0$

donc $(u_1, \ldots, u_n)$ et une base et une fmaille orthogonale, donc une b.o.g.

B.o.n $(Q_0, \ldots, Q_n)$ où les $Q_i = \frac{U_i}{\|U_i\|}$

$$
\begin{aligned}
\|U_i\|^2 &= \langle U_i, U_i\rangle \text{ et} \\
2\langle U_i, U_i\rangle &= \left[\overbrace{\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k((X^2-1)^i)^{(k+1)}((X^2-1)^i)^{(i-k-1)}}^{0}\right]_{-1}^{1} + (-1)^i\int_{-1}^{1}((X^2-1)^i)^{(2i)}(X^2-1)^i \,\mathrm{d}X \\
&= (-1)^i\int_{-1}^{1}(X^{2i}+\cdots)^{(2i)}(X^2-1)^i \,\mathrm{d}X \\
&= (-1)^i(2i)!\int_{-1}^{1}(X-1)^i(X+1)^i \,\mathrm{d}X \\
\int_{-1}^{1}(X-1)^i(X+1)^i \,\mathrm{d}X &= \underbrace{\left[\frac{(X-1)^{i+1}(X+1)^i}{i+1}\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \frac{i}{i+1}\int_{-1}^{1}(X-1)^{i+1}(X-i)^{i-1} \,\mathrm{d}X \quad \text{par IPP} \\
&= \frac{-i}{i+1}\int_{-1}^{1}(X-1)^{i+1}(X+1)^{i-1} \,\mathrm{d}X \\
&= \frac{-i}{i+1}\left(\underbrace{\left[\frac{(X-1)^{i+2}(X+1)^{i-1}}{i+1}\right]_{-1}^{1}}_{0} - \frac{i-1}{i+2}\int_{-1}^{2}(X-1)^{i+2}(X+1)^{i-2} \,\mathrm{d}X\right) \\
&= (-1)^2\frac{i(i-1)}{(i+1)(i+2)}\int_{-1}^{1}(X-1)^{i+2}(X+1)^{i-2} \,\mathrm{d}X \\
&= \vdots \\
&= (-1)^i\frac{i!}{(i+1)\times\cdots\times(2i)}\int_{-1}^{1}(X-1)^{2i} \,\mathrm{d}X \\
&= (-1)^i\frac{i!^2}{(2i)!}\left[\frac{(X-1)^{2i+1}}{2i+1}\right]_{-1}^{1} \\
&= (-1)^i\frac{i!^2}{(2i)!}\left(-\frac{(-2)^{2i+1}}{2i+1}\right) \\
&= (-1)^i\frac{i!^2 2^{2i+1}}{(2i+1)!}
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
\|U_i\|^2 &= \frac{(-1)^i}{2}(2i)!(-1)^i\frac{i!^2 2^{2i+1}}{(2i+1)!} \\
&= \frac{i! 2^{2i}}{2i+1} \\
\iff Q_i &= \frac{U_i\sqrt{2i+1}}{\sqrt{i!}\ 2^i}
\end{aligned}
$$

3.4

Remarque

$$d(P, \mathbb{R}_n[X]) = 0 \iff \deg P \leq n$$

$$d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = d(P, p^{\perp}_{\mathbb{R}_n[X]}(P))^2 \text{ car } \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 < n$$

$$\begin{aligned} p^{\perp}_{\mathbb{R}_n[X]}(P) &= \sum_{i=0}^{n} \langle P, Q_i \rangle \, Q_i \\ &= \| \underbrace{P - p^{\perp}_{\mathbb{R}_n[X]}(P)}_{\in \mathbb{R}_n[X]^{\perp}} \|^2 \end{aligned}$$

D'après Pythaya:

$$\begin{aligned} \|P\|^2 &= \| \underbrace{(P - p^{\perp}_{\mathbb{R}_n[X]}(P))}_{\in \mathbb{R}_n[X]^{\perp}} + \underbrace{p^{\perp}_{\mathbb{R}_n[X]}(P)}_{\in \mathbb{R}_n[X]} \|^2 \\ &= \|P - p^{\perp}_{\mathbb{R}_n[X]}(P)\|^2 + \|p^{\perp}_{\mathbb{R}_n[X]}(P)\|^2 \\ &= d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 + \sum_{i=0}^{n} \langle P, Q_i \rangle^2 && \text{magie des b.o.n.} \end{aligned}$$

ÀPCR $N = \deg P$
On a

$$\begin{aligned} d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = 0 \\ \text{donc } \sum_{i=0}^{n} \langle P, Q_i \rangle^2 = \|P\|^2 \end{aligned}$$

4

$E = \mathbb{R}[X]$ $\phi = \int_0^1 \cdot$

Montrons que ϕ n'est pas représentable. Supposons qu'il existe $U \in R[X]$ tel que $\phi = \langle \cdot, U \rangle$
Notons $U = u_0 + u_1 X + \cdots + u_n X^n$
On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 X^{n+1} \, \mathrm{d}X = \left\langle \lambda^{n+1}, u_0 + u_1 X + \cdots + u_n X^n \right\rangle \\ \text{ie } \frac{1}{n+2} = 0 \text{ IMP} \end{aligned}$$

5

f est un sev de $\mathbb{R}^3$ car

$$\begin{aligned} f &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 2x + y + 2z = 0 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ \text{donc } d(A, F) &= d(A, p_F^{\perp}(A)) \end{aligned}$$

Meth. 1 Calcul d'une b.o.n. de f

- $\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\epsilon_2 = \frac{\cdot}{\|\cdot\|}(u_2 - \sum_{i=1}^{1} \langle u_1, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1)$

Meth. 2 D'après le cours,

$$\begin{aligned} d(A, F) &= \frac{|2 \cdot 4 + 3 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} \\ &= \frac{15}{3} = 5 \end{aligned}$$

6

7

8

9

10

11

12

13

$\|a\| = \|b\| = 1$

$$f : \begin{cases} E & \to E \\ x & \mapsto x - \langle a, x \rangle b \end{cases}$$

13.1

f endo? $f = \mathrm{id} - g$ avec $g : \begin{cases} E & \to E \\ x & \mapsto \langle a, x \rangle b \end{cases}$

Donc f est linéaire comme CL d'AL.

13.2

$\dim E = n < +\infty$ Comme des isos en dim. finie

$$f \text{ bij} \iff f \text{ inj}$$

Calculons

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{x \in E, f(x) = 0_E\} \\ &= \{x \in E, x = \langle a, x \rangle b\} \\ &\subset \operatorname{Vect}(b) \end{aligned}$$

Soit $x \in \operatorname{Vect}(b)$ *i.e.*de la forme $x = \lambda b$

Est-il dans $\operatorname{Ker} f$**?**

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \langle a, x \rangle b \\ &= \lambda b - \lambda \langle a, b \rangle b \\ &= \lambda(1 - \langle a, b \rangle) b \end{aligned}$$

$$f(x) = 0 \iff \langle a, b \rangle = 1$$

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &\leq \|a\| \|b\| && \text{d'après Cauchy-Schwarz} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle = 1 &\iff \text{on est dans le } \textit{cas d'égalité} \text{ de Cauchy-Schwarz.} \\ &\iff a \propto_{\text{positivement}} b \\ &\iff a = b && \text{car } \|a\| = \|b\| \end{aligned}$$

Conclusion CNS de bijectivité: $\boxed{a \neq b}$

13.3

On suppose f bijective (*i.e.*$a \neq b$).

$$f^{-1}(x) = y \iff x = f(y)$$

$$
\begin{aligned}
x = f(y) &\iff x = y - \langle a, y\rangle b \\
&\iff y = x + \langle a, y\rangle b
\end{aligned}
$$

y est de la forme $x + \lambda b$. On réinjecte.
On a

$$
\begin{aligned}
y = x + \langle a, y\rangle b &\iff x + \lambda b \\
&= x + \langle a, x + \lambda b\rangle b \\
&= x + \langle a, x\rangle b + \lambda \langle a, b\rangle b \\
\iff \lambda(1 - \langle a, b\rangle)b &= \langle a, x\rangle b \\
\iff \lambda(1 - \langle a, b\rangle) &= \langle a, x\rangle && \text{car } b \neq 0_E \text{ car } \|b\| = 1 \\
\iff \lambda &= \frac{\langle a, x\rangle}{1 - \langle a, b\rangle}
\end{aligned}
$$

Conclusion $y = x + \frac{\langle a,x\rangle}{1-\langle a,b\rangle} b$ $i.e. f^{-1} : \begin{cases} E & \to E \\ x & \mapsto x + \frac{\langle a,x\rangle}{1-\langle a,b\rangle} b \end{cases}$

13.4

On suppose f non bijective $i.e. a = b$

Calculons $f \circ f$ Soit $x \in E$

$$
\begin{aligned}
f(f(x)) &= f(x) - \langle a, f(x)\rangle b \\
&= x - \langle a, x\rangle b - \langle a, x - \langle a, x\rangle b\rangle b \\
&= x - \langle a, x\rangle b - \langle a, x\rangle b + \langle a, b\rangle \langle a, x\rangle b \\
&= x - 2\langle a, x\rangle a + \frac{\|a\|}{1} \langle a, x\rangle a && \text{car } a = b \\
&= x - \langle a, x\rangle a \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

Somme directe associée? Pour $a = b$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &= \operatorname{Vect}(b) \\
&= \operatorname{Vect}(a) && \text{car } a = b \\
\operatorname{Im} f &= \{f(x), x \in E\} \\
&= \{x - \langle a, x\rangle b,\ x \in E\} \\
&= \{x - \langle a, x\rangle a,\ x \in E\} \\
&= \{p^{\perp}_{\operatorname{Vect}(b)}(x),\ x \in E\} \\
&= \operatorname{Vect}(b)^{\perp}
\end{aligned}
$$

14

14.1

$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}({}^tAA)$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \operatorname{Ker} A$.

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{Donc } ({}^tAA)x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{ie } x \in \operatorname{Ker}({}^tAA)$$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \operatorname{Ker}({}^tAA)$ $i.e. {}^tAAx = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Alors } {}^tx{}^tAAx &= {}^t x \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \\ \text{ie } {}^t(Ax) \times (Ax) &= 0 \qquad \text{c'est le p.s. des vecteurs, pas des matrices} \\ \text{ie } \langle Ax, Ax \rangle_{\mathbb{R}^n} &= 0 \end{aligned}$$

$$(\text{En général, } {}^tX \times Y = \langle X, Y \rangle \ )$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \langle X, Y \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$
$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} {}^tX \times Y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

Par caractère défini: $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$i.e. x \in \operatorname{Ker} A$.

14.2

$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im}(A{}^tA)$

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(A^tA)$ Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tq. $y = A({}^tAx)$
Pour $z = {}^t Ax$ on obtient $y = Az$, donc $y \in \mathrm{Im}\, A$

$\boxed{\subset}$ Montrons $\dim \mathrm{Im}\, A = \dim \mathrm{Im}(A^tA)$
On sait que $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}({}^tA) = n - \dim \mathrm{Ker}\, A$

$$\mathrm{rg}({}^tAA) = n - \dim \mathrm{Ker}({}^tAA)$$

En applicant le résultat de 13.1 à ${}^tA$ plutôt qu'à A, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}({}^tA) &= \mathrm{Ker}({}^{tt}A^tA) \\ &= \mathrm{Ker}(A\ {}^tA) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{Ker}\ {}^tA = \dim \mathrm{Ker}(A\ {}^tA) \\ \iff &\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\ {}^tA = \mathrm{rg}(A\ {}^tA) && \text{en réinjectant} \end{aligned}$$

D'où
$\begin{cases} \mathrm{Im}\, A & \supset \mathrm{Im}(A\ {}^tA) \\ \dim \mathrm{Im}\, A & = \dim \mathrm{Im}(A\ {}^tA) \end{cases}$
Et donc $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}(A\ {}^tA)$

15 Pour se réveiller

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = (e_1, e_2, e_3)$

Montrer qu'il existe une base $C = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans C soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On cherche $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ tels que

1. $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$

2.

$$\mathrm{Mat}_C\, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} f(\epsilon_1)C & = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(\epsilon_2)C & = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(\epsilon_3)C & = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} f(\epsilon_1) & = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(\epsilon_2) & = \epsilon_2 \\ f(\epsilon_3) & = 2\epsilon_3 \end{cases}$$

15.1

$$f(\epsilon_1) := f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} 4x_1 - 2y_1 - 2z_1 & = 0 \\ x_1 - z_1 & = 0 \\ 3x_1 - 2y_1 - z_1 & = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z_1 & = x_1 \\ x_1 & = y_1 \\ x_1 & = y_1 \end{cases}$$
$$S = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prenons $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

15.2

$$f(\epsilon_2) := f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4x_2 - 2y_2 - 2z_2 & = x_2 \\ x_2 - z_2 & = y_2 \\ 3x_2 - 2y_2 - z_2 & = z_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x_2 - 2y_2 - 2z_2 & = 0 \\ x_2 - y_2 - z_2 & = 0 \\ 3x_2 - 2y_2 - 2z_2 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z_2 & = x_2 - y_2 = -y_2 \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

$$S = \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Prenons $\epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$f(\epsilon_3) := f\begin{pmatrix} x_3 \\ y_{33} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4x_3 - 2y_3 - 2z_3 & = 2x_3 \\ x_3 - z_3 & = 2y_3 \\ 3x_3 - 2y_3 - z_3 & = 2z_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_3 - y_3 - z_3 & = 0 \\ L_1 & \\ x_3 - 2y_3 - z_3 & = 0 \\ L_2 & \\ 3x_3 - 2y_3 - 3z_3 & = 0 \\ L_3 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_3 - y_3 - z_3 & = 0 L_1 \\ -y_3 & = 0 \\ L_2 L_2 - L_1 & \\ 3x_3 - 2y_3 - 3z_3 & = 0 \\ L_3 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_3 & = 0 \\ x_3 & = z_3 \end{cases} S \qquad = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De plus, $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une case car

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 + 0 - 1 - 0 - 0 = -1 \neq 0$$

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Mat}_{BC}\,\mathrm{id}\, D_{CB}\,\mathrm{id} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times D \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Si par exemple on nous demade A^n...

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})^n \\ &= PD^nP^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Meth 2 Trouver par contemplation $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$

$$\begin{aligned} A\epsilon_1 = \vec{0} &\iff x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A\epsilon_2 &\iff x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff (A - I_3)\epsilon_2 = \vec{O} & \\ A\epsilon_3 = 2\epsilon_3 & \\ \iff (A - 2I_3)\epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \\ \iff x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \end{aligned}$$