# Espaces préhilbertiens.

**Contexte** : dans tout le chapitre $E$ désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. **À retenir** : la formule de projection !

# I Produit scalaire

## I.1 L'exemple du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$

*Théorème 1 .* L'application $\langle\cdot,\cdot\cdot\rangle$ est :

0. à valeurs dans $\mathbb{R}$ ;
1. symétrique : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$ ;
2. bilinéaire : $\begin{cases} \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle \text{ (linéarité à gauche)} \\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle x, z\rangle \text{ (linéarité à droite)} ; \end{cases}$
3. définie-positive : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, x\rangle \geqslant 0 \text{ (positivité)} \\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E \text{ (caractère défini).} \end{cases}$

## I.2 Définitions

*Définition 1 : Produit scalaire sur $E$.*

On appelle produit scalaire sur $E$ une **forme bilinéaire symétrique définie positive sur $E$** c'est-à-dire une application $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :

1. $\Phi$ est symétrique, i. e. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \Phi(y, x) = \Phi(x, y)$ ;
2. $\Phi$ est bilinéaire, i. e. $\begin{cases} \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \Phi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\Phi(x, z) + \mu\Phi(y, z) \text{ (linéarité à gauche)} \\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \Phi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\Phi(x, y) + \mu\Phi(x, z) \text{ (linéarité à droite)} ; \end{cases}$
3. $\Phi$ est définie-positive, i. e. $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \Phi(x, x) \geqslant 0 \text{ (positivité)} \\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \Phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E \text{ (caractère défini).} \end{cases}$

**Remarque 1**

1. Le fait que le corps soit $\mathbb{R}$ est donc essentiel pour pouvoir énoncer la positivité.
2. Pour montrer la bilinéarité, il est pratique de montrer d'abord la symétrie pour n'avoir que la linéarité d'un seul côté à montrer, comme on l'a fait plus haut pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

**Notation 1** On utilise souvent l'une des trois notations suivantes pour dénoter un produit scalaire $\Phi$ sur $E$. Étant donnés deux vecteurs $x$ et $y$ de $E$ leur produit scalaire $\Phi(x, y)$ pourra se noter $(x|y)$ ou $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$.

*Définition 2 .*

1. On appelle espace préhilbertien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(E, \Phi)$.
2. On appelle espace euclidien un espace préhilbertien de dimension finie.

*Proposition-Définition 3 : Produit scalaire canoniquement associé à une base.*

Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{i\in I}$ une base de $E$.

On appelle produit scalaire canoniquement associé à $\mathcal{B}$ l'application $\begin{cases} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ \left(\sum\limits_{i\in I} x_i\varepsilon_i, \sum\limits_{i\in I} y_i\varepsilon_i\right) & \mapsto & \sum\limits_{i\in I} x_i yi. \end{cases}$

Le produit scalaire canoniquement associé à $\mathcal{B}$ est bien un produit scalaire !

**Remarque 2**

Dans la définition précédentes, toutes les sommes sont en fait finies (il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls) même pour $I$ infini, et correspondent aux décompositions dans la base $\mathcal{B}$, il s'agit juste d'une notation pratique pour éviter les doubles indices.

## I.3 Autres exemples

*Théorème 2 .*

Sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ le produit scalaire intégral $\Phi = (f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\, \mathrm{d}t$ est bien un produit scalaire.

*Proposition 1 : La restriction d'un produit scalaire est un produit scalaire.*

Autrement dit si $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $E$, et $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $\Phi_{|F\times F} : F \times F \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $F$.

## I.4 Normes et distances

*Définition 4 : Norme euclidienne.*

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot\cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien. On appelle norme euclidienne l'application $N : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & \sqrt{\langle u, u\rangle}. \end{array} \right.$

**Remarque 3** L'application $N$ est bien définie par positivité du produit scalaire. **Notation 2** On utilise souvent l'une des deux notations suivantes pour dénoter la norme euclidienne de $(E, \langle \cdot, \cdot\cdot \rangle)$.
Étant donné un vecteur $x$ de $E$ sa norme euclidienne $N(x)$ pourra se noter $\|x\|$ ou $\|x\|_2$.

*Théorème 3 : Inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot\cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Pour tous $u, v \in E$ on a $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|$.

**Remarque 4**

C'est évident dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) muni du produit scalaire usuel. Une formule et un dessin :

*Théorème 4 : Cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz.*

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot\cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Pour tous $u, v \in E$ on a $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\,\|v\|$ ssi $u$ et $v$ sont colinéaires.

*Théorème 5 : Propriétés d'une norme.*

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot\cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien. La norme euclidienne $N = u \mapsto \sqrt{\langle u, u\rangle}$

est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie :

1. l'homogénéité : $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ ;
2. la séparation : $\forall u \in E,\ N(u) = 0\quad N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$ ;
3. l'inégalité triangulaire : $\forall u, v \in E,\ N(u + v) \leq N(u) + N(v)$.

*Théorème 6 : Identités de polarisation.*

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot\cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien de norme euclidienne $\|\cdot\|$. Soient $u$, $v$ dans $E$. Alors :

1. $\langle u, v\rangle = \dfrac{\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$ ;
2. $\langle u, v\rangle = \dfrac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4}$.

*Définition 5 : Distance euclidienne.*

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien de norme euclidienne $\|\cdot\|$.

On appelle distance euclidienne entre $A$ et $B$ le réel positif $d(A,B) = \|B - A\|$.

*Théorème 7 : Propriétés d'une distance.*

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien de norme euclidienne $\|\cdot\|$. La distance euclidienne $d = (A,B) \mapsto d(A,B)$ est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie :

1. la symétrie : $\forall A,B \in E,\ d(A,B) = d(B,A)$ ;
2. la séparation : $\forall A,B \in E,\ d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ ;
3. l'inégalité triangulaire : $\forall A,B,C \in E,\ d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$.

# II Orthogonalité

## II.1 Vecteurs orthogonaux

*Définition 6 : Vecteur orthogonaux.*

Soient $u,\ v \in E$. On dit que $u$ et $v$ sont orthogonaux lorsqu'on a $\langle u,v\rangle = 0$.

(C'est une relation symétrique par symétrie du produit scalaire.)

**Notation 3** On le note $u \perp v$.

*Théorème 8 : Pythagore.*

Soient $u,\ v \in E$. Alors on a $u\perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

## II.2 Familles orthogonales

*Définition 7 .*

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de $E$ est dire orthogonale lorsqu'on a $\forall i \neq j \in I,\ u_i \perp u_j$.

*Théorème 9 : Pythagore généralisé.*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u_1, u_2, \dots u_n \in E$. Supposons la famille $(u_1, \dots, u_n)$ orthogonale.

Alors on a $\|u_1 + u_2 + \cdots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2$.

*Théorème 10 .*

Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.

*Proposition-Définition 8 .* Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{i\in I}$.

1. On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale lorsque c'est à la fois une famille orthogonale et une base. Cela équivaut à dire que c'est une famille génératrice et orthogonale formée de vecteurs non nuls.
2. On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée (b.o.n.) lorsque c'est base orthogonale formée de vecteurs de norme 1. Cela équivaut à dire que $\mathcal{B}$ est génératrice et telle que $\forall i,j \in I,\ \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \delta_{i,j}$.

## II.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

*Définition 9 .*

Soient $F$ et $G$ deux sevs de $E$. On dit que $F$ et $G$ sont orthogonaux lorsqu'on a $\forall u \in F,\ \forall v \in G,\ u \perp v$.

**Notation 4** On le note $F \perp G$ aussi. **Remarque 5**

Si $F$ et $G$ sont orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$.

### II.4 Orthogonal d'une partie ou d'un sev

*Définition 10 : Orthogonal d'une partie.*

Soit $X \subset E$. On appelle orthogonal de $X$ l'ensemble $\{v \in E,\ \forall u \in X,\ v \perp u\}$.

### II.5 Supplémentaire orthogonal

### II.6 Cas d'un espace euclidien

## III Projection orthogonale et applications

### III.1 Formule de projection

### III.2 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

### III.3 Magie des b.o.n.

### III.4 Distance à un sous-espace vectoriel