Espaces préhilbertiens et euclidiens

Exercice 4. © ★ On considère l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 muni de la forme bilinéaire Φ définie par $\Phi(P,Q) = \int_0^1 t^2 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$

1. Justifier rapidement que Φ est un produit scalaire puis orthonormaliser la base $\{1, X, X^2\}$.

   On note $u_1 = 1$, $u_2 = X$, $u_3 = X^2$, on remarque qu'on a $\mathrm{Vect}(u_1) = \mathbb{R}_0[X]$, $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathbb{R}_1[X]$, et $\mathrm{Vect}(u_1, u2, u3) = \mathbb{R}_2[X]$ et on gram-schmidte (du verbe gram-schmidter).

   - On a $\|u_1\|^2 = \|1\|^2 = \int_0^1 t^2 \times 1 \times 1\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}$ donc on pose $\varepsilon_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \sqrt{3}$.
   - On a $p^\perp_{\mathbb{R}_0[X]}(u_2) = < u_2, \varepsilon_1 > \varepsilon_1 = 3 < X, 1 > 1 = \frac{3}{4}$.

   On pose $v_2 = p^\perp_{\mathbb{R}_0[X]^\perp}(u_2) = u_2 - p^\perp_{\mathbb{R}_0[X]}(u_2) = X - \frac{3}{4}$, puis $\varepsilon_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{20}{\sqrt{5}}\Big(X - \frac{3}{4}\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(20X - 15\Big)$ car $\|v_2\|^2 = \int_0^1 t^2\Big(t - \frac{3}{4}\Big)^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{80} = \frac{5}{400}$.

   - On a $p^\perp_{\mathbb{R}_1[X]}(u_3) = < u_3, \varepsilon_1 > \varepsilon_1 + < u_3, \varepsilon_2 > \varepsilon_2 = 3\left\langle X^2, 1\right\rangle 1 + \frac{1}{5}\left\langle X^2, \Big(20X - 15\Big)\right\rangle \Big(20X - 15\Big) = \frac{4}{3}X - \frac{2}{5}$.

   On pose $v_3 = p^\perp_{\mathbb{R}_1[X]^\perp}(u_3) = u_3 - p^\perp_{\mathbb{R}_1[X]}(u_3) = X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{2}{5}$, puis $\varepsilon_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = 15\sqrt{7}\Big(X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{2}{5}\Big) = \sqrt{7}\Big(15X^2 - 20X + 6\Big)$ car $\|v_3\|^2 = \int_0^1 t^2\Big(t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{2}{5}\Big)^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{1575} = \frac{1}{15^2 \times 7}$.

2. La base obtenue est-elle échelonnée en degré ? Une autre base orthonormée pour Φ est-elle nécessairement échelonnée en degré ?

   Oui. Non. On a $X^2 \perp X^2 - \frac{7}{5}$ donc en divisant ces vecteurs par leurs normes on obtient une famille orthonormée, qu'on pourrait compléter en base orthonormée, dont deux vecteurs seraient alors de degré 2.

Exercice 6. *Une projection dans $\mathbb{R}^3$.*

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, on considère le plan P engendré par les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice dont la projection orthogonale sur P est l'application canoniquement associée.

Il s'agit de projeter sur un hyperplan. On l'a vu, pour projeter sur un hyperplan, c'est plus simple de projeter sur la droite orthogonale à l'hyperplan, puis soustraire. Autrement dit, pour projeter sur un hyperplan, le plus simple est de trouver un vecteur normal à l'hyperplan.

De façon générale, pour trouver un vecteur normal d'un hyperplan, on cherche une équation de l'hyperplan (c'est l'exercice classique de passage d'une représentation à une autre). Sauf qu'ici on est en dimension 3 alors trichons : un vecteur normal est donné par le produit vectoriel de deux vecteurs directeurs, donc ici : $\eta = u_1 \wedge u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une base orthonormée de $P^\perp$ est donc $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Appliquons la formule de projection. $p^\perp_{P^\perp}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\langle\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-x+2y+z}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x - 2y - z \\ -2x + 4y + 2z \\ -x + 2y + z \end{pmatrix}$.

Puis : $p^\perp_P\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - p^\perp_{P^\perp}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x - 2y - z \\ -2x + 4y + 2z \\ -x + 2y + z \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6x - (x - 2y - z) \\ 6y - (-2x + 4y + 2z) \\ 6z - (-x + 2y + z) \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5x + 2y + z \\ 2x + 2y - 2z \\ x - 2y + 5z \end{pmatrix}$.

La matrice demandée est $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Elle est symétrique, ce n'est pas un hasard, mais c'est pour l'an prochain (on peut retenir pour cette année que si on ne trouve pas une matrice symétrique c'est qu'on a fait une erreur de calcul).

Exercice 7. *Une symétrie orthogonale $\mathbb{R}^3$).*

On prend $E = \mathbb{R}^3$ et σ l'endomorphisme de E canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que σ est une symétrie orthogonale. Donner une base orthonormée adaptée.

Par calcul direct on obtient $M^2 = I_3$ donc d'après l'isomorphisme entre applications linéaires et matrices on a $\sigma^2 = \mathrm{id}$, autrement dit s est une symétrie. Plus précisément c'est la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(M - I_3)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(\sigma + id) = \mathrm{Ker}(M + I_3)$.

Le calcul direct donne $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ x + y + z = 0 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{\perp}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

C'est bien une symétrie orthogonale, et une base orthonormée adaptée s'obtient en concaténant une b.o.n. de F et une b.o.n. de G.

Pour une b.o.n. de G c'est simple : on prend $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Pour une b.o.n. de $F = G^{\perp}$ on peut commencer par trouver une base puis Gram-schmidter. Plus malin : prenons un vecteur dans $F = G^{\perp}$, par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Orthonormalisons-le, on obtient : $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il nous en manque un pour avoir une base de G, et là on triche et on utilise le produit vectoriel : $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient.

Conclusion : une b.o.n. adaptée est $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Au passage, la matrice ici est encore symétrique, ce n'est toujours pas un hasard.