

# Espaces préhilbertiens et euclidiens

On appelle **espace dual** de  $E$  et on note  $E^*$  l'espace vectoriel  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  des formes linéaires sur  $E$ .

## REPRÉSENTABILITÉ

### Exercice 1. *Riesz pour les enfants*

Soit  $(E, \Phi)$  un espace préhilbertien. On dit qu'une forme linéaire  $f \in E^*$  est **représentable** lorsqu'il existe un vecteur  $u \in E$  tel que  $f = \Phi(u, \cdot)$ , c'est-à-dire lorsque  $\exists u \in E, \forall v \in E, f(v) = \Phi(u, v)$ . On dit alors que  $f$  est représentée par  $u$ .

1. On se place dans le cas  $E = \mathbb{R}^n$ , muni de son produit scalaire canonique, qui est le produit scalaire usuel. Rappeler l'expression générale d'une forme linéaire et vérifier que toute forme linéaire est représentable. Quelle application géométrique peut-on en tirer, en particulier pour  $n = 2$  et  $n = 3$  (mais pas que) ?
2. Plus généralement, montrer que si  $(E, \Phi)$  est euclidien, alors toute forme linéaire est représentable !
3. Que donne ce résultat pour  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni de son produit scalaire canonique ? En déduire que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  contient au moins une matrice inversible.
4. On se place maintenant dans le cas  $E = \mathbb{R}[X]$ , muni de son produit scalaire canonique.

Montrer que  $P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$  n'est pas représentable.

### Exercice 2.

On considère l'espace  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes à coefficients réels muni de l'application  $\Phi$  définie par  $\Phi(P, Q) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P(t)Q(t) dt$ .

1. Justifier que  $\Phi$  est un produit scalaire et que sa restriction à  $\mathbb{R}_3[X]$  est un produit scalaire.
2. Existe-t-il un polynôme  $\Pi \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P(t)\Pi(t) dt = P(0)$  ? Si oui l'expliquer.
3. Existe-t-il un polynôme  $\Pi \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P(t)\Pi(t) dt = P(0)$  ? Si oui l'expliquer.

## ORTHOGONALITÉ

### Exercice 3. *Polynômes de Legendre*

On pose  $E = \mathbb{R}[X]$  et  $F = \mathbb{R}_n[X]$ .

1. Montrer que  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$  munit  $E$  d'une structure d'espace préhilbertien et munit  $F$  d'une structure d'espace euclidien.
2. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^p$  sur  $[-1, 1]$ . Montrer qu'on a

$$\int_{-1}^1 f(t)g^{(p)}(t) dt = \left[ \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k f^{(k)}(t)g^{(p-k-1)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^p \int_{-1}^1 f^{(p)}(t)g(t) dt.$$

3. Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on pose  $U_k = ((X^2 - 1)^k)^{(k)}$ .  
Dire rapidement pourquoi  $(U_0, \dots, U_n)$  est une base de  $F$ . Montrer qu'il s'agit d'une base orthogonale, et en déduire une base orthonormée  $(Q_0, \dots, Q_n)$  de  $F$ . Que dire de  $(Q_0, \dots, Q_n, \dots) = (Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ?
4. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer qu'on a  $d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^n \langle P, Q_k \rangle^2$ .  
Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle P, Q_k \rangle^2$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 4.** On considère l'espace  $\mathbb{R}_2[X]$  des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 muni de la forme bilinéaire  $\Phi$  définie par  $\Phi(P, Q) = \int_0^1 t^2 P(t)Q(t) dt$

1. Justifier rapidement que  $\Phi$  est un produit scalaire puis orthonormaliser la base  $\{1, X, X^2\}$ .
2. La base obtenue est-elle échelonnée en degré? Une autre base orthonormée pour  $\Phi$  est-elle nécessairement échelonnée en degré?

## PROJECTIONS ET SYMÉTRIES ORTHOGONALES

**Exercice 5.** Une distance dans  $\mathbb{R}^3$  (!).

Calculer la distance du point  $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  au plan vectoriel d'équation  $2x + y + 2z = 0$ .

**Exercice 6.** Une projection dans  $\mathbb{R}^3$ .

Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure euclidienne usuelle, on considère le plan  $P$  engendré par les vecteurs  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer la matrice dont la projection orthogonale sur  $P$  est l'application canoniquement associée.

**Exercice 7.** Une symétrie orthogonale ( $\mathbb{R}^3$ ).

On prend  $E = \mathbb{R}^3$  et  $\sigma$  l'endomorphisme de  $E$  canoniquement associé à  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $\sigma$  est une symétrie orthogonale. Donner une base orthonormée adaptée.

**Exercice 8.** Projections

Soit  $p$  une projection de  $E$ .

Montrer que  $p$  est orthogonale si et seulement si  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .

**Exercice 9.** Bornes inférieures.

Calculer  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^3 - at - b)^2 dt$ .

## JOKER

**Exercice 10.** Identité du parallélogramme

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. On note  $\|\cdot\|$  sa norme euclidienne.

1. Vérifier l'**identité parallélogramme** :  $\forall u, v \in E, \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ .
2. Donner une interprétation géométrique dans le cas où  $E$  est  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire usuel.  
Et dans  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel?
3. Vérifier l'**identité de la médiane** :  $\forall x, y \in E, \|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = \frac{1}{2}\|y - z\|^2 + 2\|x - \frac{y+z}{2}\|^2$ .
4. Donner une interprétation géométrique dans le cas où  $E$  est  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire usuel.

**Exercice 11.** « Normes  $p$  »

Dans cet exercice on pose  $E = \mathbb{R}^n$ . Pour tout réel  $p > 0$  on note  $N_p \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$

1. Que vaut  $N_2$  ?
2. Pour  $p \geq 1$ , montrer que  $N_p$  est positive, homogène, séparée, et vérifie l'inégalité triangulaire.
3. On note  $N_\infty$  l'application  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \lim_{p \rightarrow +\infty} N_p \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$ . Décrire plus simplement  $N_\infty$ .
4. Pour  $p \in [1, +\infty]$ , montrer que  $N_p$  vérifie l'identité du parallélogramme si et seulement si  $p = 2$ .

**Exercice 12.** *Endomorphismes orthogonaux*

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $f : E \rightarrow E$  telle que  $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ .

Montrer que  $f$  est linéaire.

**Exercice 13.** *Encore une application linéaire !*

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace **euclidien**. Soient  $a, b \in E$  tels que  $\|a\| = \|b\| = 1$ . On note  $f : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto x - \langle a, x \rangle b \end{cases}$ .

1. Justifier que  $f$  est linéaire.
2. Donner une CNS sur  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit bijective.
3. Dans le cas où  $f$  est bijective, expliciter  $f^{-1}$ .
4. Dans le cas où  $f$  n'est pas bijective, montrer que  $c$ 'est une projection.

**Exercice 14.** *Encore des matrices, des images et des noyaux !*

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'on a  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}({}^tAA)$  et  $\text{Im}(A) = \text{Im}(A {}^tA)$ .

**Exercice 15.** *Des exemples où ça ne marche pas*

Dans un espace euclidien  $E$ , on a toujours pour tout sev  $F$  les relations  $\begin{cases} F \oplus F^\perp = E & (\star) \\ (F^\perp)^\perp = F & (\star\star) \end{cases}$ .

Voyons ce qui peut se passer dans un espace préhilbertien.

1. On suppose  $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire intégral  $\left( \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt \right)$  et on note  $F = \{f \in E, f \text{ est paire}\}$ . Lesquelles des relations  $(\star)$  et  $(\star\star)$  restent vraies ?
2. On suppose derechef  $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire intégral mais on note  $F = \{f \in E, \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\}$ . Lesquelles des relations  $(\star)$  et  $(\star\star)$  restent vraies ?
3. On suppose  $E = \mathbb{R}[X]$  muni de son produit scalaire canonique et on note  $F = \text{Vect}(1 - X, 1 - X^2, \dots, 1 - X^n, \dots)$ . Lesquelles des relations  $(\star)$  et  $(\star\star)$  restent vraies ?
4. Peut-on avoir  $(\star)$  mais pas  $(\star\star)$  ?