EXM SEVDIMIN

2/2

$$\dim S_n(\mathbb{K}) \quad \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= n^2$$

$$= \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \cap S_n(\mathbb{K}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M = {}^tM = -M \} = \{ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \}$$

Ainsi $\begin{cases} \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \cap S_n(\mathbb{K}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\} \\ \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) + \dim S_n(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \end{cases}$

donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus S_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

2/3

$$F = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 \right\}$$

- On a bien $(0) \in F$
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $A, B \in F$

$$Tr(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii} + \mu b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$$

$$= 0 \quad \text{par hypothèse}$$

donc c'est bien un sev.

Les matrices nulles sont de la forme:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{n,n-1} & -(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}) \end{pmatrix}$$

Une base de l'ensemble est:

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & -1 \end{pmatrix}}_{1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & -1 \end{pmatrix}}_{2}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & (-1) \end{pmatrix} \right)$$

$$= (E_{11}-E_{nn}, \ldots, E_{n-1,n-1}-E_{nn}) = (E_{ij})_{i \neq j}$$

donc $\dim(\text{ensemble}) = n^2 - 1.$

$= \dim E - 1$

$\Rightarrow$ ensemble est un hyperplan.

$\boxed{4/1}$

Soit $(F_i)_i$ une famille d'ev

Init $(n=0)$:

$$\dim \sum_{i=1}^{0} F_i = \dim 0_E = 0_{\mathbb{N}} \leq 0_{\mathbb{N}}$$

Les n sont des m

Her (Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i \leq \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$):

$$\dim \sum_{i=1}^{n} F_i + \dim F_{n+1} \leq \sum_{i=1}^{n+1} \dim F_i$$

Avec la formule de Grassmann, car les F_i sont des sevs on a

$$\underbrace{\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i + F_{n+1}\right) + \underbrace{\dim\left(\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \cap F_{n+1}\right)}_{\geq 0}}_{\geq \dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i + F_{n+1}\right)} \leq \sum_{i=1}^{n+1} \dim F_i$$

$$\dim \sum_{i=1}^{n+1} F_i \leq \dim \sum_{i=1}^{n+1} F_i + \dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i \cap F_{n+1}\right)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} F_i$$

d'où l'hérédité

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp $\sum_i F_i$ directe

Mq $\dim \sum_i F_i = \sum_i \dim F_i$

ie $\dim\left(F_1 + \sum_2^m F_i\right) = \dim F_1 + \dim \sum_2^m F_i$ par Charles

$- \dim \underbrace{\left(F_1 \cap \sum_2^m F_i\right)}_{0}$

$\vdots$

$\dim \sum_i F_i = \sum_i \dim F_i$.

$F_1 \oplus \underbrace{G}_{\sum_2^m F_i}$ est directe par unicité de la décomposition.

$\boxed{\Leftarrow}$

3/2 fin

$$\begin{cases} F_1 \cap (F_2 + \cdots + F_n) = \{0_E\} \\ F_2 \cap (F_3 + \cdots + F_n) = \{0_E\} \\ \vdots \\ F_{n-1} \cap F_n = \{0_E\} \end{cases}$$

Mq $\sum_1^n F_i$ est directe en mq 0_E a une unique décomposition

$$0_E = \underbrace{u_1}_{\in F_1} + \underbrace{u_2 + \cdots + u_m}_{F_2 + \cdots + F_m} \quad \text{où } u_i \in F_i$$

Comme $F_1 \cap (F_2 + \cdots + F_m) = \{0_E\}$,

$F_1 \oplus (F_2 + \cdots + F_m)$.

donc $u_1 = 0_E$ et $\underbrace{u_2}_{\in F_2} + \underbrace{u_3 + \cdots + u_n}_{\in \sum_3^n F_i} = 0_E$

or $F_2 \cap \sum_3^n F_i = \{0_E\}$ donc

$u_2 = 0_E$ et $\sum_3^m u_i = 0$

par récurrence immédiate

$$u_1 = \cdots = u_n = 0_E$$

donc $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.

3/2

Meth 2

$F_1, \dots, F_m$ sevs E

Notons $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ des bases de resp. $F_1, \dots, F_m$
et $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{B}_m$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp $\bigoplus_{i=1}^{m} F_i$.

Alors $\mathcal{B}$ est une base adaptée à $\bigoplus_{i=1}^{m} F_i$.

$$\begin{aligned}
\dim \sum_1^n F_i &= \operatorname{card} \bigsqcup_1^m \mathcal{B}_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \operatorname{card} \mathcal{B}_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \dim F_i
\end{aligned}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supp $\dim F_1 = \dots = \dim F_m$

On sait que $\mathcal{B}$ génératrice $\sum_1^m F_i$ par définition

or
$$\begin{aligned}
\operatorname{card} \mathcal{B} &= \sum_{i=1}^{m} \operatorname{card} \mathcal{B}_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \dim F_i \\
&= \dim \sum_{i=1}^{m} F_i \quad \text{par hypothèse}
\end{aligned}$$

par théorème de caractérisation des bases en dim finie,

$\mathcal{B}$ base de $\sum_{1}^{m} F_i$

par (réciproque du) théorème sur les bases adaptées,

$\bigoplus_{i=1}^{m} F_i$!

$\boxed{4/1}$

<u>1er cas</u> $(H_1 + H_2)$:

$$H_1 + H_2 = H_1 + H_1 = H_1$$

par idempotence de la somme (des sevs)

<u>2e cas</u> $(H_1 \neq H_2)$:

Alors montrons qu'on a $H_1 + H_2 = E$

$H_1 \neq H_2$ donc ÀRP il existe $\begin{cases} u \in H_1 \\ u \notin H_2 \end{cases}$

Donc $\mathrm{Vect}(u) \cap H_2 = \{0_E\}$

donc $\mathrm{Vect}\, u \oplus H_2 = E$ par carac des suppl en dim finie.

Donc $H_1 + H_2 \supset \mathrm{Vect}\, u + H_2 = E$

donc $H_1 + H_2 = E$ car $H_1 + H_2$ sev E

$\boxed{4/2}$ $H_1 \cap H_2$? deux cas :

- $H_1 = H_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 = H_1 \cap H_1 = H_1$
  donc $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 = n-1$
- $H_1 \neq H_2 \Rightarrow \dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2)$
  $= (n-1) + n-1 - n = n-2$

Dans tout les cas $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n-2$

$\boxed{4/3}$ Par récurrence (sur m)

<u>init</u> $(m \in \{0, 1, 2\})$:

- $\dim \bigcap_{i=1}^{0} H_i = \dim E = n \geq n - 0$
- $\dim \bigcap_{i=1}^{1} H_i = \dim H_1 = n-1 \geq n-1$
- $\dim \bigcap_{i=1}^{2} H_i = \dim H_1 \cap H_2 \geq n-2$

<u>hér</u> (Soit $p \in \mathbb{N}$ et supposons $\forall H_1, \dots, H_p$ hyperplans, $\dim(\bigcap_1^p H_i) \geq n-p$.):

Soient $H_1, \dots, H_p, H_{p+1}$ des hyperplans

$$\dim\left(\bigcap_1^p H_i \cap H_{p+1}\right) = \dim \bigcap_1^p H_i + \dim H_{p+1} - \dim\left(\bigcap_1^p H_i + H_{p+1}\right)$$ d'après Grassmann

Or $\bigcap_1^p H_i + H_{p+1} \supset H_{p+1}$ donc par croissance de la dimension,
$\dim\left(\bigcap_1^p H_i + H_{p+1}\right) \geq \dim H_{p+1}$

Or $\dim H_{p+1} = n-1$

donc $\dim\left(\bigcap_1^p H_i + H_{p+1}\right) \in \{n-1, n\}$

Finalement,

$$\dim H_{p+1} - \dim\left(\bigcap_1^p H_i + H_{p+1}\right) \geq -1$$

d'où $\dim\left(\bigcap_1^p H_i \cap H_{p+1}\right) \geq \dim \bigcap_1^p H_i + (-1)$

$\geq n-p-1$ par hdr

$= n-(p+1)$

d'où l'hérédité.

$\boxed{4/4}$ $\begin{cases} F \text{ sev } E \\ \dim E = d \ (= n-p) \end{cases}$

Mq $F =$ intersections de $p = n-d$ hyperplans

D'après le cours F a un supplémentaire G tq $\dim G = n-d$

Considérons une base adaptée à

$F \oplus G = E$ $\boxed{n-p \quad p}$ de la question précédente

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \sqcup \mathcal{B}_G = (\underbrace{f_1, \dots, f_d}_{n-p}, \underbrace{g_1, \dots, g_{n-d}}_{p})$$

Notons pour $i \in [\![1, n-d]\!]$

$$H_i = \text{Vect}(\underbrace{f_1, \dots, f_d, g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_{n-d}}_{\text{libre car sous-famille de } \mathcal{B} \text{ libre.}})$$

H_i est un hyperplan pour $i \in [\![1, n-d]\!]$

Mq $\bigcap_{1}^{n-d} H_i = F$.

- Pour tout $i \in [\![1, n-d]\!]$, on a $F \subset H_i$

puisque $\begin{cases} F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_d) \\ H_i = \text{Vect}(f_1, \dots, f_d, \dots) \end{cases}$

donc $F \subset \bigcap_{i=1}^{n-d} H_i$

- Soit $u \in \bigcap_{i=1}^{n-d} H_i \subset E$

$\mathcal{B}$ est une base de E donc u peut s'écrire de façon unique sous la forme $u = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_d f_d + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_{n-d} g_{n-d}$

Pour tout $i \in [\![1, n-d]\!]$, $u \in H_i$

Donc u peut s'écrire

$$u = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_d f_d + \beta_1 g_1 + \cdots + \beta_{i-1} g_{i-1}$$
$$+ \beta_{i+1} g_{i+1}$$
$$+ \cdots + \beta_{n-d} g_{n-d}$$

Par unicité $\boxed{\mu_i = 0}$

et ceci est vrai pour tout i

donc $\mu_1 = \cdots = \mu_{n-d} = 0$

donc $u = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_d f_d \in F$