(I) $(1+\sqrt{2})^0 = 1 = a_0 + b_0\sqrt{2}$

En posant $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases}$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supp $\overset{\text{def}}{\exists} (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$, $\quad (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$

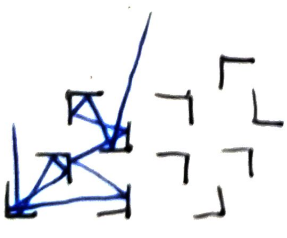
Alors
$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{n+1} &= (1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2}) \\ &= (1+\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) \\ &= a_n + 2b_n + \sqrt{2}\,a_n + \sqrt{2}\,b_n \\ &= (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2}\end{aligned}$$

En posant $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \in \mathbb{Z} \\ b_{n+1} = a_n + b_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

On a bien $(1+\sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$ d'où l'hérédité.

On a ainsi défini par récurrence a et $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

reste à montrer $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$



$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1$

donc $(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = (-1)^n$

ie $(a_n+\sqrt{2}b_n)(a_n-b_n\sqrt{2}) = (-1)^n$

ie $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$

ie $a_n \cdot a_n + b_n(-2b_n) = (-1)^n$

Pour avoir Bézout, il faudrait $\dots = (-1)^n$.
Si $n \in 2\mathbb{N}$, $(-1)^n = 1$ et on a une relation de Bézout.
Si $n \in 2\mathbb{N}+1$, on a juste à multiplier par -1 à gauche et à droite

$\cdot(-1)^n$

$$a_n \cdot \underbrace{(-1)^n a_n}_{\in \mathbb{Z}} + b_n \cdot \underbrace{((-1)^{n+1} 2b_n)}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{(-1)^n(-1)^n}_{1}$$

d'après <u>Bézout</u> : $a_n \wedge b_n = 1$

$b = (n+1)! + 1$

$a = n! + 1$

$$b = \underbrace{(n+1)}_{q}\underbrace{(n!+1)}_{a} \underbrace{-\ n}_{r}$$

$b \wedge a = a \wedge n$ (d'ap. le lemme $\boxed{1}$)

$$\underbrace{a} = \underbrace{n}\underbrace{(n-1)!}_{q} + \underbrace{1}$$

$a \wedge n = n \wedge 1 = 1$

$1 = a - n(n-1)!$

$n = b - (n+1)a$

$\Rightarrow 1 = a - (b-(n+1)a)(n-1)!$

$1 = ((n+1)!+1)a - (n-1)!\,b$ (Bézout)

$$x^2 - 10y^2 = 2$$

$$x^2 \equiv 2\ [10]$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	6	-1	4	1	0	1	4	-1	6

Optimisation:

$$x^2 \equiv 2\ [5]$$

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4

$$3^x - 2^y = 5$$

mod 8 avec $y \geq 3$

$$3^x \equiv 5\ [8]$$

x	0	1	2	3	4
3^x [8]	1	3	-1 3	1	5