# Polynômes de Tchebychev

## *Partie I*

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $T_0 = 1, T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce.

1.a Expliciter $T_2$ et $T_3$.

1.b Déterminer le degré du polynôme $T_n$ ainsi que son coefficient dominant.

2.a Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

2.b En déduire les valeurs de $T_n(1)$ et $T_n'(1)$.

2.c Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de $T_n$ appartenant à l'intervalle $[-1,1]$.
Combien y en a-t-il ? Qu'en déduire ?

## *Partie II*

L'objectif de cette partie est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ où $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

1.a Réaliser la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X(X-1)}$.

En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)}$ et que pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.

1.b Etablir que la suite $(S_n)$ converge. On note $\ell$ sa limite.

2. On introduit $S_n' = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)^2}$.

2.a Former une relation exprimant $S_{2n}$ en fonction de $S_n$ et $S_n'$.

2.b En déduire que $(S_n')$ converge et exprimer sa limite $\ell'$ en fonction de $\ell$.
Nous allons maintenant poursuivre l'étude en calculant $\ell'$ à l'aide des polynômes de Tchebychev :

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{1,\dots,n\}$, on note $x_k = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ les racines de $T_n$.

3.a Etablir l'égalité $\dfrac{T_n'}{T_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{X - x_k}$.

3.b En déduire $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1 - \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}} = n^2$,

puis les valeurs des sommes : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\tan^2\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}}$.

4.a Justifier par un argument de convexité que, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ : $\sin x \leq x \leq \tan x$

4.b En déduire un encadrement de $S_n'$ puis les valeurs de $\ell'$ et $\ell$.