Correction

Partie I

1.a $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$.

1.b Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $\deg T_n = n$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie aux rangs $n \geq 0$ et $n+1$. Au rang $n+2$:
On sait $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
Par hypothèse de récurrence $\deg T_n = n$ et $\deg T_{n+1} = n+1$ d'où $\deg XT_{n+1} = n+2$.
Par somme de polynômes de degré distincts : $\deg T_{n+2} = n+2$.
Récurrence établie.
Les coefficients dominants de T_0 et T_1 valent 1.
Pour $n \geq 1$, la relation $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, implique, connaissant le degré de chaque polynôme, que le coefficient dominant de T_{n+1} est le double de celui de T_n .
Par suite, pour $n \geq 1$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} .

2.a Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$:
Pour $n = 0$ et $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie aux rangs $n \geq 0$ et $n+1$. Au rang $n+2$:
$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta = \cos(n+2)\theta$.
Récurrence établie.

2.b Pour $\theta = 0$, $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ donne $T_n(1) = 1$.
En dérivant la relation $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, on obtient $-\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n\sin n\theta$
donc pour $\theta =]0,\pi[$, $T_n'(\cos\theta) = \dfrac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$.
Quand $\theta \to 0$, $T_n'(\cos\theta) \to T_n'(1)$ et $\dfrac{n\sin n\theta}{\theta} \sim n^2$ donc $T_n'(1) = n^2$.

2.c Soit $x \in [-1,1]$ une racine de T_n .
Pour $\theta = \arccos x \in [0,\pi]$ on a $x = \cos\theta$ et $T_n(x) = \cos n\theta = 0$.
Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ puis $\theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$
Sachant $\theta \in [0,\pi]$, on peut affirmer $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$.
Ainsi $x = \cos\dfrac{\pi}{2n}, \cos\dfrac{3\pi}{2n}, \dots,$ ou $\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2n}$.
Inversement, par calculs, ces éléments sont racine de T_n .
Ainsi les racines de T_n sont les $x_1,\dots,x_n$ avec $x_k = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$.
Pour $k \in \{1,\dots,n\}$ les $\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ sont des éléments deux à deux distincts de $[0,\pi]$.
La fonction cosinus étant injective sur $[0,\pi]$, on peut dire que les $x_1,\dots,x_n$ sont deux à deux distincts.
Le polynôme T_n possède donc n racines dans l'intervalle $[-1,1]$.
Or $\deg T_n = n$, on peut donc affirmer qu'il n'y a pas d'autres racines et que ces dernières sont simples.

Partie II

1.a $\dfrac{1}{X(X-1)}=\dfrac{X-(X-1)}{X(X-1)}=\dfrac{1}{X-1}-\dfrac{1}{X}$.

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{n}.$$

Pour tout $k\geq 2$, on a $\dfrac{1}{k^2}\leq\dfrac{1}{k(k-1)}$ donc

$$S_n=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\leq 2-\frac{1}{n}.$$

1.b $S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}\geq 0$ donc (S_n) est croissante. De plus (S_n) est majorée par 2 donc (S_n) converge.

2.a $S_{2n}=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}$. En séparant les termes d'indices paris et impairs :

$$S_{2n}=\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)+\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1}{4}S_n+S'_n.$$

2.b $S'_n=S_{2n}-\dfrac{1}{4}S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{3}{4}\ell$ car $S_{2n},S_n\to\ell$.

3.a T_n étant de coefficient dominant 2^{n-1} et de racines $x_1,\ldots,x_n$, on peut écrire :

$T_n=2^{n-1}\displaystyle\prod_{\ell=1}^{n}(X-x_\ell)$. $T'_n=2^{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n}(X-x_\ell)$ puis $\dfrac{T'_n}{T_n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-x_k}$.

3.b L'évaluation de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-x_k}=\frac{T'_n}{T_n}$ en 1 donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}=n^2$.

Sachant $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}}=2n^2$.

soit encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1+\frac{\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}}{\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}}=2n^2$ d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}}=2n^2-n$.

4.a La fonction sinus est concave sur $[0,\pi/2[$ donc en dessous de sa tangente en 0 d'équation $y=x$.

La fonction tangente est convexe sur $[0,\pi/2[$ donc au dessus de sa tangente en 0 d'équation $y=x$.

Ainsi $\forall x\in[0,\pi/2[,\sin x\leq x\leq\tan x$.

4.b $\forall x\in]0,\pi/2[$, $\dfrac{1}{\tan^2 x}\leq\dfrac{1}{x^2}\leq\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Pour $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, $x=\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{16n^2}{(2k-1)^2\pi^2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}}$,

puis : $\dfrac{(2n^2-n)\pi^2}{16n^2}\leq\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}\leq\frac{\pi^2}{8}$

Par le théorème des gendarmes : $S'_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\pi^2}{8}=\ell'$ puis $\ell'=\dfrac{4}{3}\dfrac{\pi^2}{8}=\dfrac{\pi^2}{6}$.