Endomorphismes nilpotents

Thèmes : espaces vectoriels, applications linéaires, dimension finie

Dans tout le problème $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

On note $\tilde{o}$ l'endomorphisme nul de E et Id l'endomorphisme identité.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et f endomorphisme de E, on définit par récurrence l'endomorphisme f^n par :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f \circ f^n.$$

Un endomorphisme f de E est dit nilpotent si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \tilde{o}$.

Notons qu'alors, pour tout entier $p \geq n$, $f^p = \tilde{o}$.

Partie I – Deux exemples

1. Dans cette question $E = \mathbb{K}^n$ espace vectoriel des n uplets d'éléments de $\mathbb{K}$.
Soit $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ définie par $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

1.a Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.

1.b Déterminer la dimension de l'image et du noyau de l'endomorphisme φ.

1.c Montrer que φ est nilpotent.

2. Dans cette question $E = \mathbb{K}_n[X]$ espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\Delta : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

2.a Justifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

2.b Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.
Déterminer $\deg \Delta(P)$ en distinguant les cas selon que P est, ou n'est pas un polynôme constant.

2.c Déterminer image et noyau de Δ.

2.d Etablir que Δ est un endomorphisme nilpotent.

Partie II – Etude générale

1. Soit f et g des endomorphismes de E.

1.a Justifier que si f est nilpotent et que f et g commutent alors $f \circ g$ est nilpotent.

1.b Justifier que si $f \circ g$ est nilpotent alors $g \circ f$ est nilpotent.

1.c On suppose que f est nilpotent.
Montrer que l'endomorphisme $\mathrm{Id} - f$ est inversible.

2. Soit f un endomorphisme nilpotent de E.
Justifier l'existence d'un plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \tilde{o}$.
Celui-ci est appelé indice de nilpotence de l'endomorphisme nilpotent f, on le note $\nu(f)$.

3. Soit f un endomorphisme nilpotent de E.
L'objectif de cette question est d'établir que $\nu(f) \leq \dim E$.
Pour cela on pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p = \ker f^p$.

3.a Déterminer $N_{\nu(f)}$.

3.b Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p \subset N_{p+1}$.

3.c Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dim N_p = \dim N_{p+1}$, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $N_p = N_{p+q}$.

3.d Conclure.

Partie III – Commutant d'un endomorphisme nilpotent maximal

Soit f un endomorphisme nilpotent de E tel que $\nu(f) = \dim E$.
Pour alléger la suite, nous convenons de noter n au lieu de $\nu(f)$ l'indice de nilpotence de f.

On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E commutant avec f.

1. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. Soit $g \in C(f)$.

2.a Justifier qu'il existe $\vec{x}_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(\vec{x}_0) \neq \vec{o}$.

2.b Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{x}_0, f(\vec{x}_0), \ldots, f^{n-1}(\vec{x}_0))$ constitue une base de E.

2.c On note $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ les composantes du vecteur $g(\vec{x}_0)$ dans la base $\mathcal{B}$.
Exprimer, pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, $g(f^k(\vec{x}_0))$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

2.d En déduire que $g = a_0 \operatorname{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

3. Conclure que $C(f) = \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.

4. Déterminer la dimension de $C(f)$.