Correction

Partie I

1.a $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ est bien définie.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.
$\varphi(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n) = (0, \lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_{n-1} + \mu y_{n-1}) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$.
Donc φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.

1.b $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \ker\varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = (0, \ldots, 0) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$.
Donc suite $\ker\varphi = \left\{(0, \ldots, 0, x_n) / x_n \in \mathbb{K}\right\} = \text{Vect}(\vec{u})$ avec $\vec{u} = (0, \ldots, 0, 1) \neq \vec{o}$.
Ainsi $\dim\ker\varphi = 1$ et par le théorème du rang $\dim \text{Im}\,\varphi = n - 1$.

1.c $\varphi^2(x_1, \ldots, x_n) = (0, 0, x_1, \ldots, x_{n-2})$,..., $\varphi^{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0, x_1)$ et $\varphi^n(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$.
Ainsi $\varphi^n = \tilde{o}$ et φ est donc un endomorphisme nilpotent.

2.a $\Delta : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ est bien définie car si $\deg P \leq n$ alors $\deg P(X+1) - \deg P(X) \leq n$.

2.b Si P est constant alors $P(X+1) = P(X)$ donc $\Delta(P) = 0$ et on a $\deg\Delta(P) = -\infty$.
Si P non constant alors on peut écrire :
$P = a_p X^p + Q$ avec $p = \deg P$, $a_p \in \mathbb{K}^*$ et $\deg Q \leq p - 1$.
On a alors $\Delta(P) = a_p(X+1)^p - a_p X^p + Q(X+1) - Q(X) = p a_p X^{p-1} + R(X)$ avec $\deg R < p - 1$ car la puissance d'exposant $p-1$ du polynôme Q s'est simplifiée dans la différence $Q(X+1) - Q(X)$.
Par suite $\deg\Delta(P) = p - 1$.

2.c Par ce qui précède $\ker\Delta$ est formé des polynômes constants et $\text{Im}\,\Delta \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
On a $\dim\ker\Delta = 1$ donc par le théorème du rang $\dim \text{Im}\,\Delta = \dim \mathbb{K}_n[X] - 1 = n = \dim \mathbb{K}_{n-1}[X]$ donc $\text{Im}\,\Delta = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

2.d Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a $\deg\Delta(P) \leq \deg P - 1$ donc $\deg\Delta^2(P) \leq \deg P - 2$,...,
$\deg\Delta^{n+1}(P) \leq \deg P - n + 1 < 0$ donc $\Delta^{n+1}(P) = 0$. Ainsi $\Delta^{n+1} = \tilde{o}$ et Δ est nilpotent.

Partie II

1.a On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \tilde{o}$.
$(f \circ g)^n = (f \circ g) \circ (f \circ g) \circ \ldots \circ (f \circ g)$ or f et g commutent donc $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n = \tilde{o}$ car $f^n = \tilde{o}$.
Ainsi $f \circ g$ est nilpotent.

1.b On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(f \circ g)^n = \tilde{o}$.
$(g \circ f)^{n+1} = (g \circ f) \circ (g \circ f) \circ \ldots \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ \ldots \circ (f \circ g) \circ f = g \circ (f \circ g)^n \circ f = \tilde{o}$.
Ainsi $g \circ f$ est nilpotent.

1.c On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \tilde{o}$.
$\text{Id} = \text{Id} - f^n = (\text{Id} - f) \circ (\text{Id} + f + \cdots + f^{n-1})$. En posant $g = \text{Id} + f + \cdots + f^{n-1}$, on a
$(\text{Id} - f) \circ g = g \circ (\text{Id} - f) = \text{Id}$ donc $\text{Id} - f$ est inversible et $(\text{Id} - f)^{-1} = g$.

2. Soit $A = \left\{n \in \mathbb{N}^* / f^n = \tilde{o}\right\}$. A est une partie de $\mathbb{Z}$, minorée et non vide car f est supposé nilpotent donc A possède un plus petit élément, c'est notre indice de nilpotence.

3.a Puisque $f^{\nu(f)} = \tilde{o}$ on a $N_{\nu(t)} = \ker f^{\nu(f)} = E$.

3.b Soit $\vec{x} \in N_p$, on a $f^p(\vec{x}) = \vec{o}$ donc $f^{p+1}(\vec{x}) = f(f^p(\vec{x})) = f(\vec{o}) = \vec{o}$ d'où $\vec{x} \in N_{p+1}$. Ainsi $N_p \subset N_{p+1}$.

3.c Notons que $N_p \subset N_{p+1}$ et $\dim N_p = \dim N_{p+1}$ implique $N_p = N_{p+1}$

Par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$.

Pour $q = 0$: ok

Supposons la propriété établie au rang $q \geq 0$.

On a $N_p = N_{p+q} \subset N_{p+q+1}$. Inversement, soit $\vec{x} \in N_{p+q+1}$. On a $f^{p+q+1}(\vec{x}) = \vec{o}$ donc $f^q(\vec{x}) \in N_{p+1} = N_p$ d'où $f^{p+q}(\vec{x}) = \vec{o}$ i.e. $\vec{x} \in N_{p+q}$. Ainsi $N_{p+q+1} \subset N_{p+q} = N_p$. Par double inclusion l'égalité.

Récurrence établie.

3.d La suite $(\dim N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels stationnaire égale à $\dim E$ à partir du rang $\nu(f)$. Par 3.c, dès que deux termes consécutifs sont égaux la suite devient stationnaire donc la suite devient stationnaire à partir d'un rang inférieur à $\dim E$ et donc $\nu(f) \leq \dim E$.

Partie III

1. $C(f) \subset \mathcal{L}(E)$, $\tilde{o} \in C(f)$ car $\tilde{o} \circ f = f \circ \tilde{o} = \tilde{o}$.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $g, h \in C(f)$. $f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda f \circ g + \mu f \circ h = \lambda g \circ f + \mu h \circ f = (\lambda g + \mu h) \circ f$ donc $\lambda g + \mu h \in C(f)$.

2.a $f^{n-1} \neq \tilde{o}$ car n est l'indice de nilpotence de f. Par suite il existe $\vec{x}_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(\vec{x}_0) \neq \vec{o}$.

2.b Supposons $\lambda_0 \vec{x}_0 + \lambda_1 f(\vec{x}_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}_0) = \vec{o}$.

En appliquant f^{n-1} à cette relation : $\lambda_0 f^{n-1}(\vec{x}_0) + \vec{o} + \cdots + \vec{o} = \vec{o}$.

Or $f^{n-1}(\vec{x}_0) \neq \vec{o}$ donc $\lambda_0 = 0$.

En appliquant f^{n-2} à la relation initiale on obtient : $\lambda_1 f^{n-1}(\vec{x}_0) = \vec{o}$ et donc $\lambda_1 = 0$.

On obtient ainsi successivement $\lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.

La famille $\mathcal{B}$ est donc libre, étant constituée de $n = \dim E$ vecteurs de E, c'est une base de E.

2.c $g(\vec{x}_0) = a_0 \vec{x}_0 + a_1 f(\vec{x}_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}_0)$.

$g(f(\vec{x}_0)) = f(g(\vec{x}_0)) = a_0 f(\vec{x}_0) + a_1 f^2(\vec{x}_0) + \cdots + a_{n-2} f^{n-1}(\vec{x}_0)$ ...

$g(f^k(\vec{x}_0)) = f^k(g(\vec{x}_0)) = a_0 f^k(\vec{x}_0) + a_1 f^{k+1}(\vec{x}_0) + \cdots + a_{n-k-1} f^{n-1}(\vec{x}_0)$.

2.d Introduisons $h = a_0 \,\mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \in \mathcal{L}(E)$.

Pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $g(f^k(\vec{x}_0)) = h(f^k(\vec{x}_0))$.

g et h prennent mêmes valeurs sur la base $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0), \ldots, f^{n-1}(\vec{x}_0))$ donc $g = h$.

3. Par l'étude ci-dessus : Ainsi $C(f) \subset \left\{a_0 \,\mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\}$.

Inversement pour $g = a_0 \,\mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$, on a $g \circ f = a_0 f + a_1 f^2 + \cdots + a_{n-1} f^n = f \circ g$ donc $g \in \mathcal{C}$. Ainsi $\left\{a_0 \,\mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\} \subset C(f)$.

Par double inclusion $C(f) = \left\{a_0 \,\mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$.

4. La famille $(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$ est génératrice de $C(f)$.

De plus si $a_0 \,\mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} = \tilde{o}$ alors en évaluant en $\vec{x}_0$: $a_0 \vec{x}_0 + a_1 f(\vec{x}_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}_0) = \vec{o}$ or la famille $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0), \ldots, f^{n-1}(\vec{x}_0))$ est libre donc $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

La famille $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est donc aussi une famille libre.

Finalement $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est une base de $C(f)$ et donc $\dim C(f) = n$.