Etude d'une fonction intégrale

thème illustré : les développements limités.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $t+\arctan t=0$.

2. On pose $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t+\arctan t}$.

2.a Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2.b Etudier la parité de f.

2.c Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer $f'(x)$ pour $x>0$.

2.d Donner le sens de variation de f.

3. On étudie le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

3.a Déterminer une constante C telle que pour tout $x>0$,

$$\left|f(x)-\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right|\le C.\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

3.b En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$ et préciser sa valeur.

4. On étudie le comportement de f au voisinage de 0^+.

4.a Montrer qu'il existe deux réels a,b tels que $\dfrac{1}{t+\arctan t}=\dfrac{a}{t}+bt+o(t)$ au voisinage de 0^+.

4.b Soit g une fonction de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{t\to 0+}g(t)=0$.

Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0+}\sup\limits_{t\in[x,2x]}|g(t)|=0$.

4.c En déduire que si h est une fonction continue de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(x)=o(x)$ au voisinage de 0^+ alors $\displaystyle\int_x^{2x}h(t)\mathrm{d}t=o(x^2)$ au voisinage de 0^+.

4.d Montrer que f admet au voisinage de 0 un développement à l'ordre 2 que l'on exprimera.

4.e Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable.
Exprimer alors les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

4.f Etudier, au voisinage de 0, la position relative de f et de sa tangente en 0.

4.g Déterminer un équivalent simple de $f'(x)$ en 0.

4.h En déduire que f est deux fois dérivable en 0, et calculer $f''(0)$.