Correction

d'après Mines de Sup 1998

1. La fonction $t \mapsto t + \arctan t$ est strictement croissante et s'annule en 0. Par suite 0 est solution de l'équation et c'est la seule.

2.a L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t + \arctan t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

Pour tout $x > 0$, cette fonction est continue par morceaux sur le segment $[x, 2x]$ donc $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t + \arctan t}$ est bien définie.

Pour tout $x < 0$, un argument semblable relatif au segment $[2x, x]$ permet aussi de conclure.

2.b Par le changement de variable $u = -t$, on obtient $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

2.c L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t + \arctan t}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, elle y admet donc une primitive H.

On a alors $f(x) = H(2x) - H(x)$. La fonction H est dérivable et de dérivée $\mathcal{C}^\infty$ donc elle est elle-même $\mathcal{C}^\infty$. Par opérations, f est $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = \dfrac{2}{2x + \arctan 2x} - \dfrac{1}{x + \arctan x}$.

2.d Par étude de fonctions : $\arctan 2x \le 2\arctan x$ sur $\mathbb{R}^+$. Par suite $f'(x) \ge 0$ sur $]0, +\infty[$. La fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$. Par parité, elle est décroissant sur $]-\infty, 0[$.

3.a $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| \le \int_x^{2x} \left| \frac{\arctan t}{t(t + \arctan t)} \mathrm{d}t \right| \le \frac{\pi}{2} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$. $C = \dfrac{\pi}{2}$ convient.

3.b $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{}$ et $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 2$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln 2$.

4.a Par calculs $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{12}$.

4.b $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall 0 < t \le \alpha$, $|g(t)| \le \varepsilon$.

Pour $0 < x \le \alpha/2$, on a pour tout $t \in [x, 2x]$, $t \in]0, \alpha]$ donc $|g(t)| \le \varepsilon$.

Par suite $\displaystyle\sup_{t \in [x,2x]} |g(t)| \le \varepsilon$. Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \beta > 0$, $\forall 0 < x \le \beta$, $\left| \displaystyle\sup_{t \in [x,2x]} |g(t)| \right| \le \varepsilon$.

On peut conclure $\displaystyle\lim_{x \to 0+} \sup_{t \in [x,2x]} |g(t)| = 0$.

4.c $h(t) = t\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$.

$\left| \displaystyle\int_x^{2x} h(t)\mathrm{d}t \right| \le \sup_{t \in [x,2x]} |\varepsilon(t)| \int_x^{2x} t\mathrm{d}t = \frac{3}{2} \sup_{t \in [x,2x]} |\varepsilon(t)| x^2 = o(x^2)$ car $\displaystyle\sup_{t \in [x,2x]} |\varepsilon(t)| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

4.d Par intégration de la relation $\dfrac{1}{t + \arctan t} = \dfrac{a}{t} + bt + o(t)$ entre x et $2x$: $f(x) = a\ln 2 + \dfrac{3}{2}bx^2 + o(x^2)$.

4.e On prolonge par continuité par la valeur $f(0) = \dfrac{1}{2}\ln 2$.

f admettant un DL à l'ordre 1 en 0, elle est dérivable et ici $f'(0) = 0$ (facteur de x).

4.f La courbe est au dessus de sa tangente (horizontale) en 0 comme l'assure le signe du terme $\dfrac{3}{2}bx^2 + o(x^2)$ ou encore le tableau des variations de f.

4.g On ne peut pas dériver les DL. Cependant $f'(x) = \dfrac{2}{2x + \arctan 2x} - \dfrac{1}{x + \arctan x}$ donne $f'(x) \sim \dfrac{1}{4}x$.

4.h Cet équivalent fournit un DL à l'ordre 1 permettant de conclure que f' est dérivable en 0 et que $f''(0) = 0$.