Développements limités

Exercice 1. *Une application de la formule de Taylor pour se mettre dans le bain*
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, donner le développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Exercice 2. *Obtention de DL par somme/produit/différence/composée...*
Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n$ de la fonction arccos.
On pourra s'aider du résultat de l'exercice précédent.

Exercice 3. *Obtention de DL par somme/produit/différence/composée...*
Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :

a. $x \mapsto \dfrac{1}{1+\operatorname{sh}(x)}$, à l'ordre 3,

b. $x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$, à l'ordre 4,

c. $x \mapsto 1/(2-x)$, à l'ordre n.

Exercice 4. *Calcul de limites (1)*
Calculer les limites des expressions suivantes en 0 :

a. $\dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{x^2}$ b. $\dfrac{\operatorname{sh}(x)-\arctan(x)}{x^3}$ c. $\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$

Exercice 5. *Calcul de limites (2)*
Calculer les limites des expressions suivantes en 0 :

a. $\dfrac{2\arctan(x)-\arctan 2x}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ b. $\dfrac{\sin(\operatorname{sh}(x))}{\operatorname{sh}(\sin(x))}$ c. $\dfrac{\sin(\sin(\sin(\ldots\sin(x)\ldots)))}{\operatorname{sh}(\operatorname{sh}(\operatorname{sh}(\ldots\operatorname{sh}(x)\ldots)))}$

Exercice 6. *Calcul de limites (3)*
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

Exercice 7. *Application rigolote (annale de CCINP, mais pas dans la banque).*

a. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1-x}$.

b. Donner, pour $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$, la valeur de $f^{(k)}(0)$.

DL, exos

1

$(\mathrm{id}^\alpha)' = \alpha\,\mathrm{id}^{\alpha-1}$

$(\mathrm{id}^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)\,\mathrm{id}^{\alpha-2}$

$(\mathrm{id}^\alpha)''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,\mathrm{id}^{\alpha-3}$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$

d'ap T-Y

$$(1+\mathrm{id})^\alpha = 1 + \alpha\,\mathrm{id} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\mathrm{id}^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\mathrm{id}^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\mathrm{id}^n + \mathrm{id}^n\varepsilon$$

où $\varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$

<u>Cas particulier $\alpha = n$</u>

$$(\mathrm{id}+1)^n = \underbrace{1}+\underbrace{n}\mathrm{id} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}\mathrm{id}^2 + \dots + \overbrace{\frac{n!}{n!}}^{\binom{n}{n}}\mathrm{id}^n + \mathrm{id}^n\underbrace{\varepsilon}$$

à k :

$$\underbrace{\frac{n(n-1)\cdot(n-k+1)}{k!}}_{\binom{k}{n}}\mathrm{id}^k$$

D'ap le BdN en fait $\boxed{\varepsilon = x \mapsto 0}$!

notatn

$$\boxed{\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}}$$

<u>On a alors</u> $(1+\mathrm{id})^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\mathrm{id}^k + \mathrm{id}^n\varepsilon$

où $\varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$

$x \mapsto \ln(1+x)$ a 0 $\ln(1+h)$

$\boxed{2}$

$$\text{acos}' = \frac{-1}{\sqrt{1-\text{id}^2}} = -(1-\text{id}^2)^{-1/2}$$

Cherchons un $DL_{2n}(0)$ de $x \longmapsto (1-x^2)^{-1/2}$

$$(1+X)^\alpha = 1 + \alpha X + \dots + \binom{\alpha}{n} X^n + X^n \varepsilon(X)$$

avec $X = -x^2$ et $\alpha = -1/2$:

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \binom{-1/2}{n}(-1)^n x^{2n} + x^{2n}\tilde{\varepsilon}(x)$$

$$-(1-x^2)^{-1/2} = -1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots + \binom{-1/2}{n}(-1)^{n+1} x^{2n} + x^{2n}\hat{\varepsilon}(x)$$

$$\arccos(x) = \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{acos } 0} - x - \frac{x^3}{6} + \dots + \binom{-1/2}{n}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}\check{\varepsilon}(x)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{-1/2}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}x^{2k+1}\right) + x^{2n+1}\check{\varepsilon}(x)$$

<u>Or</u>

$$\binom{-1/2}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \times \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(\frac{-2k+1}{2})}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \times \frac{(\frac{1}{2})^k(-1)^k \times 1 \times 3 \times \cdot \times (2k-1)}{k!}$$

$$= \frac{-1}{2k+1} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2k-1)}{2^k k!}$$

$$= \frac{-1}{2k+1} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (2k-1) \times 2k}{(2 \times 4 \times \dots \times 2k) 2^k k!}$$

$$= \frac{-1}{2k+1} \times \frac{(2k)!}{2^k k! \, 2^k k!} = \frac{-(2k)!}{(2k+1)(2^k k!)^2}$$

EX $\underline{M}$DL

$\boxed{3/a}$ $x \mapsto \dfrac{1}{1+\operatorname{sh} x}$ de l'ordre 3

$$\frac{1}{1+\operatorname{sh} x} = 1 - \operatorname{sh} x + \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh}^3 x\, \varepsilon(x)$$

car $\operatorname{sh} \xrightarrow[0]{} 0$

$$= 1 - x - \frac{x^3}{6} + \left(x + \frac{x^3}{6}\right)^2 - \left(x + \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^3 \varepsilon(x)$$

$$= 1 - x + x^2 - \frac{7x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$$

$\boxed{3/b}$ $x \mapsto e^{\cos x} = \exp \circ \cos.$ de l'ordre 4

$\cos \xrightarrow[0]{} 1 \neq 0$

$$e^{\cos x - 1 + 1} = e^{\cos x}$$

$$X := \cos x - 1.$$

$$e^{X+1} = e^X e$$

$$e^X = 1 + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{4!} + X^4 \varepsilon(x)$$

$$X = \cos x - 1$$

$$X = \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x) \cancel{-1}$$

$$e^X = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)\right)^2}{2}$$

$$+ \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)\right)^3}{6}$$

$$+ (\ldots\ldots)^4 \varepsilon(x)$$

DL, exos

$\boxed{4/c}$ $\quad \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{\underbrace{x^2 \sin^2(x)}}$

commence par x^2...
et $x^2 \cdot x^2 = x^4$, $DL_4(0)$ it is

remq Jusq'où pousser le DL ?

On pousse l'ordre du DL à la plus petite puissance de x du dénominateur.

$$x^2 \sin^2(x) = x^2(x + x\varepsilon(x))^2 = x^2(x^2 + \underbrace{2x\varepsilon(x) + x^2\varepsilon(x)^2}_{x^2\tilde{\varepsilon}(x)})$$

$$= x^4 + x^4\tilde{\varepsilon}(x) \qquad = x^2(x^2 + x^2\tilde{\varepsilon}(x))$$

$$= x^4 + x^4\tilde{\varepsilon}(x)$$

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\hat{\varepsilon}(x)\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - \sin^2 x = x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\hat{\varepsilon}(x)\right)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\hat{\varepsilon}(x)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\hat{\varepsilon}(x)\right)$$

$$= x^2 - x^2 - x^4\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + x^4\check{\varepsilon}(x)$$

$$= \frac{1}{3}x^4 + x^4\check{\varepsilon}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^4 + x^4\tilde{\varepsilon}(x)}{\frac{1}{3}x^4 + x^4\check{\varepsilon}(x)} = \frac{\frac{1}{3}x + \tilde{\varepsilon}(x)}{x + \check{\varepsilon}(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{3}$$

$\boxed{5/a}$

$$\frac{2\arctan x - \arctan(2x)}{x^n} = \frac{2(x-\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)-2x+\frac{(2x)^3}{3}+x^3\tilde{\varepsilon}(x)}{x^n}$$

$$= \frac{2x-\frac{2x^3}{3}-2x+\frac{8x^3}{3}+x^3\hat{\varepsilon}(x)}{x^n}$$

$$= \frac{6x^3}{3x^n} + \frac{x^3\check{\varepsilon}(x)}{3x^n}$$

$$= \frac{2+\acute{\varepsilon}(x)}{x^{n-3}} \quad \text{où} \quad \left.\begin{matrix}\varepsilon\\ \hat{\varepsilon}\\ \tilde{\varepsilon}\\ \check{\varepsilon}\end{matrix}\right\} \xrightarrow[0]{} 0$$

Si $n>3$ et $n \in 2\mathbb{N}$

$$\frac{2\arctan - \arctan\circ 2id}{(id)^n} \xrightarrow[0]{} +\infty$$

Si $n>3$ et $n\in 2\mathbb{N}+1$

$$\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{0^+} \text{truc} = +\infty\\ \lim\limits_{0^-} \text{truc} = -\infty\end{matrix}\right. \Rightarrow \text{pas de limite}$$

Si $n=3$

$$\lim_{0} \text{truc} = 2$$

Si $n<3$

$$\lim_{0} = 0$$

$\boxed{5/b}$ $DL_3(0)$ de $\sin\circ sh$

On a $sh \xrightarrow[0]{} 0$ et $\sin \xrightarrow[0]{} 0$

$$sh(x) - \frac{sh(x)^3}{6} + x^3\varepsilon(x) = \left(x + \frac{x^3}{6} + x^3\tilde{\varepsilon}(x)\right) - \frac{x^3}{6} + x^3\hat{\varepsilon}(x)$$
$$= x + x^3\check{\varepsilon}(x)$$

$DL_3(0)$ de $sh\circ\sin$

$$\sin(x) + \frac{\sin(x)^3}{6} + x^3\varepsilon(x) = x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \cancel{\frac{x^3}{6}} + x^3\bar{\varepsilon}(x)$$

$$\frac{\sin\circ sh}{sh\circ\sin} = \frac{id + id^3\cdot\check{\varepsilon}}{id + id^3\bar{\varepsilon}} = \frac{id}{id} \xrightarrow[0]{} 1$$

$\boxed{5/c}$ Mq $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sin^{\circ n} = id + id\cdot\varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \xrightarrow[0]{} 0$ par récurrence.

Init $(n=0)$:

On a bien $\sin^{\circ 0} = id = id + id\cdot\varepsilon_0$ en posant $\varepsilon_0 = x\mapsto 0$

(on a bien $\varepsilon_0 \xrightarrow[0]{} 0$)

Her Soit $n\in\mathbb{N}$. Supp $\overset{def}{\exists}\varepsilon_n$, $\begin{cases}\varepsilon_n \xrightarrow[0]{} 0\\ \sin^{\circ n} = id + id\cdot\varepsilon_n\end{cases}$

Alors $\sin^{\circ n+1} = \sin\circ\sin^{\circ n}$

$= \sin^{\circ n} + \sin^{\circ n}\cdot\varepsilon(x)$ car $\sin^{\circ n} = id + id\cdot\varepsilon_n \xrightarrow[0]{} 0$

où $\varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$

$= id + id\cdot\varepsilon_n + (id + id\cdot\varepsilon_n)\cdot\varepsilon$

$= id + id\cdot\varepsilon_{n+1}$

pour une certaine fonction $\varepsilon_{n+1} \xrightarrow[0]{} 0$

d'où l'her.

CCL On est content.

Pour $sh^{\circ n}$:

Soit Pf la preuve précédente.

On applique les α-conversions suivantes à Pf :

$$\alpha\left(Pf, \begin{cases} \text{“}\sin\text{”} \longmapsto \text{“}sh\text{”} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{“}\varepsilon_n\text{”} \longmapsto \text{“}\tilde{\varepsilon}_n\text{”} \\ \text{“}\varepsilon\text{”} \longmapsto \text{“}\tilde{\varepsilon}\text{”} \end{cases}\right)$$

Ainsi il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{\sin^{\circ n}}{sh^{\circ m}} = \frac{id + id \cdot \varepsilon_n}{id + id \cdot \tilde{\varepsilon}_m} = \frac{1+\varepsilon_n}{1+\tilde{\varepsilon}_m} \xrightarrow[0]{} \frac{1}{1} = 1$$

$\boxed{6}$ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln a}{n}}$

$\frac{\ln a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc on peut utiliser un DL.

$$e^{\frac{\ln a}{n}} = 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\ln a}{n}\varepsilon\left(\frac{\ln a}{n}\right)$$

Notons $\varepsilon_n := \ln(a)\cdot\varepsilon\left(\frac{\ln a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \quad \text{où } \varepsilon_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

Soit Pf la preuve précédente pour $\sqrt[n]{b}$, on fait une α-conversion :

$$\alpha\left(Pf, \begin{cases} \text{“}a\text{”} \longmapsto \text{“}b\text{”} \\ \text{“}\varepsilon\text{”} \longmapsto \text{“}\tilde{\varepsilon}\text{”} \end{cases}\right)$$

On a donc $\sqrt[n]{b} = 1 + \frac{\ln b}{n} + \frac{\tilde{\varepsilon}_n}{n}$ où $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ \mathbb{R} = \mathbb{R} \end{cases}$

Donc $\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2} = 1+\dfrac{\ln a \ \ln b}{2n} + \dfrac{\hat{\varepsilon}_n}{n}$ où $\hat{\varepsilon}_n \xrightarrow[\infty]{} 0$

Ainsi

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)}$$

$$= e^{n\ln\left(1+\underbrace{\frac{\ln a \ \ln b}{2n}+\frac{\hat{\varepsilon}_n}{n}}_{\to 0}\right)}$$

On a $\dfrac{\ln a+\ln b}{2n}+\dfrac{\hat{\varepsilon}_n}{n} \longrightarrow 0$ Donc on peut effectuer un DL.

$$\ln\left(1+\frac{\ln a \ \ln b}{2n}+\frac{\hat{\varepsilon}_n}{n}\right) = \frac{\ln a+\ln b}{2n}+\frac{\check{\varepsilon}_n}{n} \quad \text{où } \check{\varepsilon}_n \xrightarrow[\infty]{} 0.$$

Finalement

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = e^{n\left(\frac{\ln a+\ln b}{2n}+\frac{\check{\varepsilon}_n}{n}\right)}$$

$$= e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}+\check{\varepsilon}_n}$$

$$\longrightarrow e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}} \quad \text{par continuité de exp}$$

$$= e^{\ln a\frac{1}{2}}\, e^{\ln b\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$= \sqrt{ab}$$

Ma. Gni. Fique.

Bonus Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculez $\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

DL_1 de $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ $\quad \frac{x}{n} + \frac{x}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)$ où $\varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$ $\quad$ car $\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n \cdot \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$
$$= e^{n \cdot \left(\frac{x}{n} + \frac{x}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right)}$$
$$= e^{x + x \cdot \varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)}$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x \quad \text{par continuité de exp}$$

7/a $DL_5(0)$:

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon_1(x) \\ \frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^5 \varepsilon_5(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x}{1-x} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right) + x^5 \varepsilon_3(x)$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right)x^4 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right)x^5 + x^5 \varepsilon_4(x)$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{13}{24}x^4 + \frac{13}{24}x^5 + x^5 \varepsilon_4(x)$$

7/b

$\frac{\cos x}{1-x}$ est C^n au voisinage de 0 (et sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$)

D'après T-Y

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{6} + f''''(0)\frac{x^4}{24} + f^{(4)}(0)\frac{x^5}{120} \ldots$$
$$+ f^{(5)}(0) \ldots$$
$$+ x^5 \varepsilon(x)$$
où $\varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$

Par unicité du DL

$f(0) = 1$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 3$; $f''''(0) = 13$

$f^{(5)}(0) = 65$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + x^4 \check{\varepsilon}(x)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{6} + x^4 \check{\varepsilon}(x)$$

$$\Rightarrow e^{\cos x} = e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^5}{6} + ex^4 \check{\varepsilon}(x)$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} e$$