Déterminant de Vandermonde

On appelle **matrice de Vandermonde** l'une des deux matrices suivantes :

$$V(a_1,\dots,a_n)=\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1\\a_1&a_2&a_3&\dots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\dots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\dots&a_n^{n-1}\end{pmatrix}=\left(a_j^{i-1}\right)_{i,j}\text{ ou }W(a_1,\dots,a_n)=\begin{pmatrix}1&a_1&{a_1}^2&\dots&{a_1}^{n-1}\\1&a_2&{a_2}^2&\dots&{a_2}^{n-1}\\1&a_3&{a_3}^2&\dots&{a_3}^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&{a_n}^2&\dots&{a_n}^{n-1}\end{pmatrix}=\left(a_i^{j-1}\right)_{i,j}$$

L'une est la transposée de l'autre donc ces deux matrices ont le même déterminant $D(a_1,\dots,a_n)$.

On l'appelle **déterminant de Vandermonde**.

Dans cette activité, on démontrer le résultat suivant, qui fait partie du programme :

$$D(a_1,\dots,a_n)=\prod_{i<j}a_j-a_i$$

Exemples

1. Vérifier le résultat pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$... et, pourquoi pas, pour $n=0$!

2. Le résultat est évident s'il existe $i<j$ tels que $a_i=a_j$. Pourquoi ?

Par opérations élémentaires

On part de $V(a_1,\dots,a_n)$. Si on préfère $W(a_1,\dots,a_n)$, remplacer ligne par colonne (et inversement) dans la suite.

3. Exécuter les opérations élémentaires $L_i\leftarrow L_i-(a_1\times L_{i-1})$ pour $i=n$, puis $i=n-1$, puis ..., puis $i=2$.

4. En utilisant un développement par rapport à la première colonne et la n-linéarité, obtenir une relation de récurrence sur $D(a_1,\dots,a_n)$.

5. Conclure.

Avec un polynôme

On se place ici uniquement dans le cas où les a_i sont distincts, les autres cas étant triviaux d'après la question 2.

On note $K_d[X]$ l'ensemble des polynômes de degrés inférieur ou égal à d. On rappelle le résultat suivant sur les polynômes : si $P(X)\in\mathbb{K}_d[X]$ a d racines distinctes λ_1, ..., λ_d alors $P(X)$ peut se factoriser sous la forme $P(X)=\mu\prod_{k=1}^{d}(X-\lambda_k)$, où μ est le coefficient de X^d dans $P(X)$.

On considère le déterminant $P(X)=D(a_1,\dots,a_{n-1},X)$ de $V(a_1,\dots,a_{n-1},X)=\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1\\a_1&a_2&a_3&\dots&X\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\dots&X^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\dots&X^{n-1}\end{pmatrix}$.

6. En développant par rapport à la dernière colonne, justifier que $P(X)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ en X. Donner le coefficient de X^{n-1} dans $P(X)$.

7. Justifier que a_1, a_2, ..., a_{n-1} sont des racines de $P(X)$.

8. En utilisant le rappel, donner l'expression factorisée de $P(X)$ et en déduire $D(a_1,\dots,a_n)$.

Il existe encore bien d'autres méthodes de calcul de ce déterminant, mais il faut rester raisonnable...

ACT $\underline{M}$ DET VAND

$\boxed{1}$

$\boxed{2}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$\boxed{3}$

$$= \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ a^2(a_2-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & \cdots & a_n^2(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & & \\ a_2^{n-1}(a_2-a_1) & a_3^{n-1}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-1}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1) \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1<j}(a_j - a_1)\, D(a_2, a_3, \dots, a_n) = D(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$= \prod_{1<j}(a_j - a_1) \prod_{2<j}(a_i - a_2)\, D(a_3, \dots, a_n) = D(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$\vdots$

$$= \prod_{1<j}(a_j - a_1) \prod_{2<j}(a_j - a_1) \cdots \prod_{n-1<j}(a_j - a_2)\, \underbrace{D(a_n)}_{1}$$

$\boxed{4}$

$$= \prod_{i<j}(a_j - a_i) \times 1$$

$\boxed{5}$

$$P(X) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n+1} & & & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \times X$$

$$+ (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdot & a_{n-1} \\ a_1^3 & a_2^3 & \cdots & a_{n-1}^3 \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdot & a_n^{n-1} \end{vmatrix} X^2 + \cdots + \underbrace{(-1)^{n+n}}_{1} D(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) X^{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} b_k X_k \qquad \text{où } b_k = (-1)^{n+1+k} \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ \vdots & & & \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_{n-1}^{k-1} \\ a_1^{k+1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_{n-1}^{k+1} \\ \vdots & & & \vdots \end{vmatrix} \in \mathbb{K}$$

$$P(X) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$$

$\leftarrow$ polynômes de deg $\leq n-1$

et le coef dominant de X^{n-1} est $D(a_1,\dots,a_{n-1})$

$\boxed{6}$

Pour $i\in\{1,\dots,n-1\}$

$$P(a_i)=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_{n-1} & a_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_i^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_i^{n-1} \end{vmatrix} = 0 \Leftarrow \text{deux colonnes identiques}$$

$\Rightarrow a_1, \dots, a_{n-1}$ sont des racines de P

$\boxed{7}$

$$P(X)=D(a_1,\dots,a_{n-1})\prod_{i\leq n-1}(X-a_i)$$

d'où
$$\begin{aligned} P(a_n) &= D(a_1,\dots,a_{n-1},a_n) \\ &= D(a_1,\dots,a_{n-1})\prod_{i<n}(a_n-a_i) \\ &= D(a_1,\dots,a_{n-2})\prod_{i<n}(a_n-a_i)\prod_{i<n}(a_n-a_i) \\ &\ \vdots \\ &= \underbrace{D(a_1)}_{1}\underbrace{\prod_{i<2}(a_2-a_i)\cdots\prod_{i<n}(a_n-a_i)}_{\prod_{j<i} a_j-a_i} \\ &= \end{aligned}$$