Quelques réflexes pour les calculs de déterminants

Ça ne se veut pas exhaustif.

Quand c'est déjà fini

- La matrice est triangulaire :
  $\longrightarrow$ c'est fini, le déterminant est le produit des éléments diagonaux.
- La matrice a une ligne nulle ou une colonne nulle :
  $\longrightarrow$ c'est fini, le déterminant est nul.
- La matrice a deux lignes ou deux colonnes identiques ou proportionnelles :
  $\longrightarrow$ c'est fini, le déterminant est nul.
- La matrice est une matrice 3×3 ou 4×4 sans paramètre :
  $\longrightarrow$ on utilise l'algorithme de Gauss.

Des choses simples à essayer

- La matrice a une ligne ou une colonne avec un seul coefficient non nul :
  $\longrightarrow$ il est raisonnable de développer par rapport à cette ligne ou cette colonne.
- La somme des lignes de la matrice est proportionnelle à $u = (1\ 1\ \cdots\ 1)$ (ou la somme des colonnes à ${}^t u$) :
  $\longrightarrow$ on somme toutes les lignes (ou toutes les colonnes) sur la première, on utilise la linéarité par rapport à la première ligne (ou colonne), puis on utilise cette ligne (ou colonne) pour simplifier les autres.

Formes remarquables

- La matrice est tridiagonale, *i. e.* de la forme $\begin{pmatrix} a_n & b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-1} & a_{n-1} & b_2 & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & c_{n-2} & a_2 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & c_1 & a_1 \end{pmatrix}$:
  $\longrightarrow$ développer par rapport à la première ligne, puis par rapport à la première colonne.
- La matrice est une matrice de Vandermonde, c'est-à-dire de la forme $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & {\alpha_1}^2 & \dots & {\alpha_1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & {\alpha_2}^2 & \dots & {\alpha_2}^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & {\alpha_3}^2 & \dots & {\alpha_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & {\alpha_n}^2 & \dots & {\alpha_n}^{n-1} \end{pmatrix}$ ou ${}^t M$:
  $\longrightarrow$ le déterminant vaut $\displaystyle\prod_{i<j} \alpha_j - \alpha_i$, c'est dans le programme.