Calculs de déterminants.

à la Arnol'd

Exercice 1. *Pas trop astucieux.*

Calculer les déterminants $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 2. *Un poil plus astucieux.*

Calculer les déterminants suivants : $|(max(i,j))_{i,j}|$, $\left|\left((-1)^{\max(i,j)}\right)_{i,j}\right|$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 3. *Diversement astucieux.*

Calculer $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & (0) & & \vdots \\ \vdots & & (0) & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & (0) & & \vdots \\ \vdots & & (0) & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & (0) & & \vdots \\ \vdots & & (0) & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & (0) & & \vdots \\ \vdots & & (0) & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 4. *Deux poils plus astucieux.*

Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} \alpha & & & 0 & & & \beta \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & \alpha & \beta & & & \\ 0 & & \beta & \alpha & & & 0 \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ \beta & & & 0 & & & \alpha \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} X & 0 & \dots & & 0 & a_0 \\ -1 & X & & & & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_{n-1}+X \end{vmatrix}$.

Exercice 5.

Parmi toutes les matrices intervenant dans les exercices précédents, lesquelles sont inversibles ?

EXMDET

$\boxed{1/2}$

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \\ 0 & b^3-c^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = 0$$

$\boxed{2/1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \ddots & & \vdots \\ & & & & & n-1 & \vdots \\ n & \cdots & & & & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & n \\ 0 & -1 & \cdots & n \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & -1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots \; 0 & n \end{vmatrix}$$

$C_i \longleftarrow C_i - C_{i+1}$

$1 \leq i \leq n-1$

en croissant

$$= n \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & -1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots \; 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= n(-1)^{n-1}$$

$\boxed{2/2}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^n \\ 1 & 1 & -1 & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ (-1)^n & \cdots & & & (-1)^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & & & & (0) \\ & 2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & (-2)^n \end{vmatrix}$$

$L_i \longleftarrow L_i - L_{i+1}$

i de 1 à $n-1$

dans cet ordre

$$= (-1)^n 2^{n-1} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

$\boxed{2/3}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix}_n = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= 2u_n - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & 0 & \cdots \\ 0 & \vdots & \cdots \\ & 0 & \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= 2u_{n-1} - u_{n-2}$$

$u_0 = 1 \qquad (*)$

$u_1 = 2 \qquad (**)$

$u_2 = 2\cdot 2 - 1 = 3$

$u_3 = 2\cdot 3 - 2 = 4$

$\vdots$

$u_n = n+1$

par récurrence double

(I) ok $(*)$ et $(**)$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\begin{cases} u_n = n+1 \\ u_{n+1} = n+2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} - u_n \\ &= 2(n+2) - n - 1 \\ &= 2n + 4 - n - 1 \\ &= n+3 \end{aligned}$$

d'où l'hérédité double

$\boxed{3/3}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 1 & & (0) & 1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 1 & (0) & & 1 & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{/1^e \text{ ligne}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & (0) & & 1 & \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

diagonale

$\boxed{3/4}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & (0) & & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & 0 \end{vmatrix}_n \underset{\substack{C_i \leftarrow C_i - C_{i+1} \\ \text{pour } i \text{ de } 1 \text{ à } n-1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & (0) & \\ 1 & & \ddots & & \\ \vdots & (0) & & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \\ & & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & & \ddots & \\ \vdots & (0) & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & (0) & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ \leftarrow C_2 - C_3 \\ \leftarrow \cdots C_n}}{=} (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & & (0) & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & (0) & 0 & 1 \\ 2-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$\boxed{3/4}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & (0) & & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_n \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_n}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & (0) & & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_n$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_n}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & (0) & & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_n$$

$$\underset{\substack{\text{dev} \\ /1^e \text{ col}}}{=} (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 2 & \cdots & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & & & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\underset{C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} C_i}{=} (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 2 & \cdots & 2 & -2n+5 \\ 1 & & (0) & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \quad 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dev } /1^e \text{ col}}{=} (-1)^{n+1}(-1)^n(5-2n) \begin{vmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2n-5$$

$\boxed{4/1}$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & & & & & \beta \\ & \ddots & (0) & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & (0) & \alpha & \beta & (0) & \\ & (0) & \beta & \alpha & (0) & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & (0) & & \ddots & \\ \beta & & & & & \alpha \end{vmatrix}}_{2n}$$

$C_1 \cdots C_n \; C_{n+1} \cdots C_{2n}$

$$\underset{\substack{C_n \leftarrow C_n - C_{n+1} \\ C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n+2} \\ \vdots \\ C_1 \leftarrow C_1 - C_{2n}}}{=} \begin{vmatrix} \alpha-\beta & & & & & \beta \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & \alpha-\beta & \beta & & \\ & & \beta-\alpha & \alpha & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ \beta-\alpha & & & & & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\underset{n\text{-linéarité}}{=} (\alpha-\beta)^n \begin{vmatrix} 1 & & & & & \beta \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & 1 & \beta & & \\ & & -1 & \alpha & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ -1 & & & & & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_n \\ L_{n+2} \leftarrow L_{n+2} + L_{n-1} \\ \vdots \\ L_{2n} \leftarrow L_{2n} + L_1}}{=} (\alpha-\beta)^n \begin{vmatrix} 1 & & & & & \beta \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & 1 & \beta & & \\ \hline & & 0 & \alpha+\beta & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-\beta)^n (\alpha+\beta)^n \quad \text{car triangulaire}$$

$$= (\alpha^2-\beta^2)^n$$

$\boxed{4/2}$

$$\begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & & (0) & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ (0) & & & X & a_{n-2} \\ & & & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix}_n \underset{\text{dev}/1^e\ \text{ligne}}{=} X \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & \ddots & (0) & & \vdots \\ (0) & \ddots & & X & \vdots \\ & & & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+(-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ (0) & & & & -1 \\ & & & & X \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= X \begin{vmatrix} X & & (0) & a_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & & X & a_{n-2} \\ (0) & & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix} + a_0$$

$$= X \left(X \begin{vmatrix} X & & (0) & a_2 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & & X & a_{n-2} \\ (0) & & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix}_{n-2} + a_1 X \right) + a_0$$

$$= X \left(X \left(X \begin{vmatrix} X & & (0) & a_3 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & & X & a_{n-2} \\ (0) & & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix}_{n-3} + a_2 X^2 \right) + a_1 X \right) + a_0$$

$\vdots$ par récurrence immédiate

$$= X^n \underbrace{\det(())}_{1} + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

$$= X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

$\boxed{2.14}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & 3 & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_n \underset{\text{dev } /1^e \text{ ligne}}{=} - \begin{vmatrix} n & 2 & & & (0) \\ 0 & 0 & 3 & & \\ & n-2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\underset{\text{dev } /1^e \text{ col.}}{=} -1 \times n \begin{vmatrix} 0 & 3 & & (0) \\ n-2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$\underset{\substack{\text{dev} \\ /1^e \text{ ligne} \\ \text{puis} \\ /1^e \text{ col}}}{=} 3n(n-2) \begin{vmatrix} 0 & 5 & & (0) \\ n-4 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{n-4}$$

$\vdots$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} n! \det(()) & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$