Déterminants à la Арнолд

I Definition

1 Dans la base canonique de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$

def à la Арнолд

Soit $u_1, \dots, u_n$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle déterminant dans la base canonique de $u_1, \dots, u_n$ (ou produit mixte de $u_1, \dots, u_n$) l'hypervolume algébrique du parallélotope porté par les n vecteurs

rpl

> « Une fois que l'on sait ceci toute la théorie devient triviale »
>
> — Арнолд

notn $\det_e(u_1, \dots, u_n)$

thm $(u_1, \dots, u_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n \iff \det_e(u_1, \dots, u_n) \neq 0$

2. Déterminant d'une matrice

def

Soit $M = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On appelle déterminant de M le det. dans la base canonique de colonnes de M ie $\det_e(C_1, \dots, C_n)$.

notn

- $\det M$
- $M := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det M$
- On peut mettre n en indice pour préciser le format

ex $\begin{vmatrix} 2 & & (-1) \\ & \ddots & \\ (-1) & & 2 \end{vmatrix}_n$

II Développement par rapport à une ligne ou une colonne

1 Développement par rapport à la 1ère colonne

notn Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $1 \leq i, j \leq n$

On note M_{ij} (notation éclatée au sol) la matrice obtenue en barrant la ligne i et la colonne j

On a $M_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$

ex

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \end{matrix}$$

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

thm

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{ij})_{ij}$

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i1} \det M_{i1}$$

en pratique

$$M = \begin{pmatrix} \oplus m_{11} & \cdots\cdots & m_{1n} \\ \ominus m_{21} & m_{22} \cdots & \vdots \\ \oplus m_{31} & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \\ \ominus m_{n1} & m_{n2} \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

ex

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = +a \det((d)) - c \det((b))$$
$$= ad - bc$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 4(2\cdot 9 - 3\cdot 8) + 7(2\cdot 6 - 3\cdot 5)$$

$$= 45 - 48 - 4(18-24) + 7(12-15)$$

$$= -3 + 24 - 21$$

$$= 0$$

coroll

ça veut dire whatever

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \ast \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \cdots \lambda_5$$

2 Transposée

thm formule de la transposée

$$\det {}^tM = \det M$$

coroll

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ \ast & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

app CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & \alpha \\ \alpha & & & 1 \end{pmatrix}$$ soit inversible

(COURS)

$$\det A = 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & \alpha & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} \alpha \underbrace{\det\begin{pmatrix} \alpha & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & \alpha \end{pmatrix}}_{\det :\ \prod \text{diagonale}}$$

$$= 1 + (-1)^{n+1} \alpha \cdot \alpha^{n-1}$$

$$= 1 - (-\alpha)^n$$

$$\Rightarrow \left(\det A = 0 \Leftrightarrow (-\alpha)^n = 1 \right.$$

$$\left. \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 1 & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \alpha = 1 & \text{sinon} \end{cases} \right)$$

$$\Rightarrow A \text{ inversible} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq \pm 1 & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \text{ou} & \\ \alpha \neq 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

3 Auto développements

thm

1 $\quad \det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \det(M_{ij})$ Développement / j^e colonne

2 $\quad \det M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \det(M_{ij})$ Développement / i^e ligne

ex Recalculons $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant / 3^e colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3) - 6(8-14) + 9(-3)$$

$$= 9(-1 + 4 - 3) = 0$$

ex

- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 3$

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2\left(-2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$

eeh ouais!

$= 2\left(0 + 1(1-4)\right)$

$= 2(-3)$

$= 6$

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 3 & \iddots & & \vdots \\ \vdots & 2 & & & & \vdots \\ 1 & 0 & & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & 2 & \iddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \cdots$

$= (-1)^{n+1} n (-1)^n (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \vdots & 2 & \iddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{n+1} n (-1)^n (n-1)(-1)^{n-1} (n-2) \cdots |1|$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^n(-1)^3 \underbrace{n(n-1)\cdot 2 \cdots 1}$$

$\sum_{k=3}^{n+1} k$ a la parité opposée de $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$= (-1)^{\sum_{k=3}^{n+1} k} n!$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & n \\ | & \diagup & 0 \\ 1 & 0 - & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1} n!$$

n	parité de $n!$
0	$\oplus$
1	$\oplus$
2	$\ominus$
3	$\ominus$
4	$\oplus$
5	$\oplus$
6	$\ominus$

On peut montrer que

$$(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

autre exemple CCINP 63

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D_{n+2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n+2}$$

$$
\begin{vmatrix}
2 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\
-1 & 2 & \ddots & & & & \vdots \\
0 & -1 & 2 & \ddots & & & 0 \\
0 & 0 & -1 & \ddots & & & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 & -1 & 2
\end{vmatrix}
$$

$$
D_{n+2} = 2D_{n+1} - (-1)
\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\
0 & \cdots & 0 & & -1 & 2
\end{vmatrix}
$$

$$
= 2D_{n+1} - (-1)(-1)D_n
$$

III Autres méthodes de calcul

1 Propriétés fondamentales

thm

L'application $\det_{\mathcal{E}} : (\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est

1 n linéaire

$$\det_{\mathcal{E}}(u_1, u_2, \dots u_{i-1}, \lambda v + \mu w, u_{i+1}, \dots, u_n) = \lambda \det_{\mathcal{E}}(u_1, \dots, v, \dots, u_n) + \mu \det_{\mathcal{E}}(u_1, \dots, w, \dots, u_n)$$

2 antisymétrique

$$\det_{\mathcal{E}}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n) = -\det_{\mathcal{E}}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n)$$

3 alterné

$$\det_{\mathcal{E}}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i, \dots, u_n) = 0$$

ex $\det_{\mathcal{E}}$ est alterné

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{2} & 1 & \boxed{2} & 1 \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & 2 \\ \boxed{0} & 1 & \boxed{0} & 2 \end{vmatrix} = 0$$

car la matrice a deux colonnes identiques

ex n-linéarité et caractère alterné

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \det_{\mathcal{e}}(u, v, w)$

où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; $w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

ie $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \det_{\mathcal{e}}(u, v, 2v - u)$

$= 2\det_{\mathcal{e}}(u, v, v) - \det_{\mathcal{e}}(u, v, u)$ par n-linéarité

$= 0$ par caractère alterné

ex $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \\ & & 3 & & \\ & 2 & & (0) & \\ 1 & & & & \end{vmatrix}$

$= \det_{\mathcal{e}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \vdots \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ par antisym

$= -\det_{\mathcal{e}}\left(\begin{pmatrix} n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ par antisym

$$= (-1)^2 \det_{\mathcal{E}} \left(\begin{pmatrix} n \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 2 \\ | \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\vdots$

$$= (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ & n-1 & & | & | \\ & & \ddots & | & | \\ & (0) & & 2 & | \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n!$$

remq retenir priotairement

- Si une matrice a (au moins) deux colonnes identiques
  $\Rightarrow$ elle est non-inversible
- $\det(\lambda I_n) = \begin{vmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$

2 Effet d'une opération élémentaire

def Opérations élémentaires

$$M := \left(\begin{matrix} | \\ C_1 \\ | \end{matrix}, \begin{matrix} | \\ C_2 \\ | \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} | \\ C_q \\ | \end{matrix} \right)$$

1 Transvection

$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ $\qquad i \neq j \wedge \lambda \in \mathbb{R}$

2 Permutation

$$C_i \longleftrightarrow C_j \qquad i \neq j$$

3 Dilatation

$$C_i \longleftarrow \mu C_i \qquad \mu \neq 0$$

def

$$M := \begin{pmatrix} — L_1 — \\ \vdots \\ — L_p — \end{pmatrix}$$

1 Transvection

$$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j \qquad j \neq i$$

2 Permutation

$$L_i \longleftrightarrow L_j \qquad j \neq i$$

3 Dilatation

$$L_i \longleftarrow \mu L_i \qquad \mu \neq 0$$

thm

Soit M' obtenu par opérations élémentaires sur M

1 La transvection préserve le déterminant

$\det M' = \det M$

2 La permutation oppose le déterminant

$\det M' = -\det M$

3 La dilation multiplie le déterminant

$\det M' = \lambda \det M$

ex

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$, $\quad L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} \qquad L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3$$

$$= 0$$

- $\begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & b & a & \ddots & b \\ a+(n-1)b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$ $\quad C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{i \neq 1} C_i$

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ \vdots & a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & b & a & \ddots & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \qquad \text{par } n\text{-linéarité}$$

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \qquad \forall i \in [\![2, n]\!], \quad C_i \leftarrow C_i - b C_1$$

$$= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

car est triangulaire