Déterminants

new

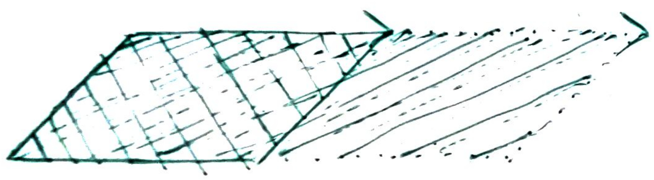
- les démos
- det d'un endomorphisme
- formule de la comatrice
- $\det(AB) = \det A \det B$

conseil d'Arnold

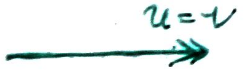
det est l'hypervolume (algébrique, orienté) du parallélotope porté par les n vecteurs.

propriétés attendues d'un hypervolume

1. n-linéaire (linéaire par rapport à chaque argument)



2. alterné deux vecteurs sont $=$ $\Rightarrow$ hypervolume $= 0$



notn

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- E est un $\mathbb{K}$-ev de dim. finie

I Formes p-linéaires

1 Définition

def formes p-linéaires

$$\text{"} \underbrace{\mathcal{L}_p}_{\substack{\text{par rapport} \\ \text{à chacun de ses} \\ p \text{ vecteurs}}}\text{"}(E^p, \mathbb{K})$$

ie $\{ f \in \mathbb{K}^{E^p}, \forall i \in [\![1,p]\!], \forall (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_p) \in E^{p-1},$
$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (v,w) \in E^2,$
$f(u_1, \dots, u_{i-1}, \lambda v + \mu w, u_{i+1}, \dots, u_p) =$
$\lambda f(u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_p) + \mu f(u_1, \dots, u_{i-1}, \dots, w, u_{i+1}, \dots, u_p) \}$

remq

$p=1$ linéaire
$p=2$ bilinéaire
$p=3$ trilinéaire

thm ensemble des formes p-linéaires

$\mathcal{F}_p(E)$ sev $\mathbb{K}^{E^p}$

lemme fondamental

1. Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base E
et $x_1, \dots, x_p \in E$ tels que

$$\begin{cases} x_1 = x_{11}\varepsilon_1 + \dots + x_{n1}\varepsilon_n & \text{ie } \ x_1\big|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ x_p = x_{1p}\varepsilon_1 + \dots + x_{np}\varepsilon_n & \text{ie } \ x_p\big|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Alors :

$$\forall f \in \mathcal{F}_p(E), \quad f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in [\![1,n]\!]^p} x_{i_1 1} \cdots x_{i_p p} \, f(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_p})$$

2. En particulier, $\dim \mathcal{F}_p(E) = n^p$ et une base est

$$\left((x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in [\![1,n]\!]^p} x_{i_1 1} \cdots x_{i_p p} \, \delta_{(i_1, \dots, i_p), (j_1, \dots, j_p)} \right)_{(j_1, \dots, j_p) \in [\![1,n]\!]^p}$$

$$= \left((x_1, \dots, x_p) \mapsto x_{j_1 1} \cdots x_{j_p p} \right)_{(j_1, \dots, j_p) \in [\![1,n]\!]^p}$$

dem

1. Soit $f \in \mathcal{F}_p(E)$.

$$f(x_1, \dots, x_p) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1 1} \varepsilon_{i_1} , \sum_{i_2=1}^{n} x_{i_2 2} \varepsilon_{i_2} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} x_{i_p p} \varepsilon_{i_p} \right)$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{p} \sum_{i_j=1}^{n} x_{i_j j} \right) f(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_p}) \qquad \text{par } p\text{-linéarité}$$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in [\![1,n]\!]^p} x_{i_1 1} \cdots x_{i_p p} \, f(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_p})$$

2. ok

2 Formes p-linéaires symétriques

def $f \in \mathcal{F}_p(E)$ est dite symétrique

$$\forall u_1,\dots,u_p,\ \forall i\neq j,\ f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p) = f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p)$$

prop

$f \in \mathcal{F}_p(E)$ symétrique $\Leftrightarrow \forall \sigma \in S_p,\ f(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)}) = f(u_1,\dots,u_p)$

dem

$\boxed{\Rightarrow}$ $\sigma = \tau_{ij}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Tout σ se décompose en $\circ$ de transpositions.

3 Formes p-linéaires antisymétriques

def $f \in \mathcal{F}_p(E)$ antisymétrique

$$\forall u_1,\dots,u_p,\ \forall i\neq j,\ f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p) = -f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p)$$

prop $f \in \mathcal{F}_p(E)$ antisymétrique

$$\forall \sigma \in S_p,\ f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \dots, u_p)$$

dem

$\boxed{\Rightarrow}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall \sigma,\ \sigma = \bigcirc_{k=1}^{r} \tau_{i_k j_k}$

$$f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = \underbrace{(-1)}_{\substack{\text{par def,} \\ \tau_{i_k j_k}}} \times \underbrace{(-1)}_{\tau_{i_{k-1} j_{k-1}}} \times \dots \times \underbrace{(-1)}_{\tau_{i_p j_p}} f(u_1, \dots, u_p)$$

$$= (-1)^k f(u_1, \dots, u_p)$$

$$= \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\text{déf. de } \varepsilon} f(u_1, \dots, u_p)$$

4 Formes p-linéaires alternées

thm $f \in \mathcal{F}_p(E)$ est alternée

f est antisymétrique

dem

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose f antisymétrique

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, u_p) \text{ par antisym}$$

donc $2 f(u_1, \dots, u, \dots, u, \dots, u_p) = 0$ et $2 \neq 0$ donc ok.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose f alternée

Soient $u_1, .., u_n \in E$

$$f(u_1, \dots, u_i + u_j, \dots, u_j + u_i, \dots, u_p) = 0$$

ie $f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p)$

$+ f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p) + \underbrace{f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_j, \dots, u_p)}_{0} = 0$

ie $f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p) = - f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p)$

notn espace des formes p-linéaires alternées sur E

$$\mathcal{A}_p(E)$$

4 Description de $\mathcal{A}_n(E)$

On sait que le déterminant ("l'hypervolume") doit appartenir à $\mathcal{A}_n(E)$

Procédons par A-S

Analyse candidat $f \in \mathcal{A}_n(E)$

Posons une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E

Pour $x_1, .., x_n \in E$, $\forall j \quad x_j \underset{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1,\dots,i_n) \in [\![1,n]\!]^n} x_{i_1 1} \cdots x_{i_n n} f(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_n})$$ (lemme fonda. avec $p=n$)

Dans cette somme il y a n^n termes mais tous les termes pour lesquels on a au moins deux i_k égaux sont nuls

Les seuls termes potentiellement non-nuls sont ceux pour lesquels tout les i_k sont différents ie $k \mapsto i_k \in$ 

ie $k \mapsto i_k \in$  par égalité des cardinaux

ie $k \mapsto i_k \in S_n$

Donc $$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n} f(\varepsilon_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \quad x_{\sigma(n),n} \underbrace{f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)}_{\in \mathbb{K}}$$

$$= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}$$

pour un certain λ dans $\mathbb{K}$

<u>Synthèse</u> Testons nos candidats

Comme $\mathcal{A}_n(E)$ et un sev (de $\mathbb{K}^{E^n}$), il suffit de mq

$$\phi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n} \in \mathcal{A}_n(E).$$

- p-linéarité

Soit $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y, z \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\phi(x_1, \dots, \lambda y + \mu z, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots (\lambda y + \mu z)_{\sigma(i),i} \cdots x_{\sigma(n),n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots (\lambda y_{\sigma(i),i} + \mu z_{\sigma(i),i}) \cdots x_{\sigma(n),n}$$

par linéarité de $!_{\mathcal{B}}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \lambda \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n} + \mu \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}$$

par distributivité

$$= \lambda \phi(x_1, \ , y, \ , x_n) + \mu \phi(x_1, \ , z, \ , x_n)$$

- caractère alterné

Mq ϕ antisym ie $\forall \gamma \in S_n, \phi(x_{\gamma(1)}, \dots, x_{\gamma(n)}) = \varepsilon(\gamma) \phi(x_1, \dots, x_n)$

Soit $\gamma \in S_n$.

$$\phi(x_{\gamma(1)}, \dots, x_{\gamma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),\gamma(1)} \cdots x_{\sigma(n),\gamma(n)}$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),\gamma(i)}$$

or $\gamma \in \mathcal{B}(⟦1,n⟧, ⟦1,n⟧)$.

On a $\gamma(i) =: j$ ie $i =: \gamma^{-1}(j)$. $i \in ⟦1,n⟧$ ie $j \in ⟦1,n⟧$.

On change donc d'indice du $\prod$:

$$\phi(x_{\gamma(1)}, \dots, x_{\gamma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(\gamma^{-1}(j)), j}$$

Or $\begin{cases} S_n \to S_n \\ \sigma \mapsto \sigma \circ \gamma^{-1} \\ \delta \circ \gamma \mapsfrom \delta \end{cases} \in$

Donc $\delta := \sigma \circ \gamma^{-1}$ ie $\sigma = \delta \circ \gamma$

$\sigma \in S_n$ ie $\delta \in S_n$

Par changement de variable :

$$= \sum_{\delta \in S_n} \varepsilon(\delta \circ \gamma) \prod_{j=1}^{n} x_{\delta(j),j}$$

$$= \sum_{\delta \in S_n} \varepsilon(\delta)\varepsilon(\gamma) \prod_{j=1}^{n} x_{\delta(j),j} \quad \text{car } \varepsilon \text{ un mdg.}$$

$$= \varepsilon(\gamma) \underbrace{\sum_{\delta \in S_n} \varepsilon(\delta) \prod_{j=1}^{n} x_{\delta(j),j}}_{\phi(x_1, \quad, x_n)}$$

thm

$\mathcal{A}_n(E)$ est une droite vectorielle

dem

On vient de voir que $\mathcal{A}_n(E) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i} \right\}$

$$= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \lambda \phi \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}(\phi)$$

Reste à voir $\phi \neq 0$. Or $\phi(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=0} \varepsilon_{\sigma(i),i}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \delta_{\sigma(i),i}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, \delta_{\sigma, id}$$

$$= \varepsilon(id)$$

$$= 1$$

$$\neq 0$$

[suite en $\LaTeX$]

2 Déterminants de n vecteurs

2.1 Définition

Définition 1 *Déterminant dans la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E*

$$\det_{\mathcal{B}} : \begin{cases} E^n & \to \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i),i} \end{cases}$$

où $\forall j, \begin{array}{c} | \\ j \\ | \end{array}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$

Remarque 1

$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

Lemme 1

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

$$\forall f \in \mathcal{A}_n(E), f = f(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}$$

Démonstration

$\mathcal{A}_n(E)$ est une droite!

$$\mathcal{A}_n(E) = \text{Vect} \det_{\mathcal{B}}$$

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$$

On évalue en $\mathcal{B}$

$$f(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$$

Théorème 1 *Formule de changement de base*

Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases.

$$\det_{\mathcal{B}_1} = \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) \det_{bc_1}$$

Démonstration

$f = \det_{\mathcal{B}_2} \in \mathcal{A}_n(E)$. On applique le lemme pour $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$

"Si on change de base, le déterminant est multiplié par une constante, qui est $\det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1)$"

Exemple 1

$$\begin{cases} E & = \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{C} & = (e_1, e_2) \\ \mathcal{B} & = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

$\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \not\parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right)$$

$\boxed{\text{Meth. 1}}$ *On utilise la définition*

$$\begin{aligned} \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} & \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \iff \begin{cases} x & = \lambda + 2\mu \qquad (L_1) \\ y & = 2\lambda + \mu \qquad (L_2) \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x - 2y & = -3\lambda \qquad (L_1 - 2L_2) \\ y - 2x & = -3\mu \qquad (L_2 - 2L_1) \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \lambda & = \frac{2y-x}{3} \\ \mu & = \frac{2x-y}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right) & = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\sigma(1),1} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}_{\sigma(2),2} \\ & = \underbrace{\lambda B}_{\sigma = \mathrm{id}} - \underbrace{\mu \alpha}_{\sigma = \tau_{ij}} \\ & = \frac{2y - x}{3} \frac{2z - t}{3} - \frac{2x - y}{3} \frac{2t - z}{3} \\ & = \frac{4yz - 2yt - 2xz + xt - (4xt - 2xz - 2yt + yz)}{9} \\ & = \frac{3yz - 3xt}{9} \\ & = \frac{xt - yz}{-3} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Meth. 2}}$ *Formule de changement de base*

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix}\right) &= xt-yz \\
\det_{\mathcal{C}}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix}\right) &= \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix}\right) && \text{par changement de base} \\
\text{ie}\quad xt-yz &= (-3)\cdot\det_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Corollaire 1

Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases.

$$\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)\times\det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1) = 1$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
1 &= \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1) \\
&= \det_{\mathcal{B}_1}(bc_2)\cdot\det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1) && \text{par changement de base}
\end{aligned}$$

2.2 Déterminants et bases

Théorème 2

Soit $\mathcal{U}$ une famille de n vecteurs de E. Sont équivalentes:

1. $\mathcal{U}$ est une base de E
2. $\forall\mathcal{B}$ base de $E, \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) \neq 0$
3. $\exists\mathcal{B}$ base de $E, \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) \neq 0$

Démonstration

$1 \implies 2$ On suppose que $\mathcal{U}$ est une base. Soit $\mathcal{B}$ une base. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) \times \det_{\mathcal{U}}(\mathcal{B}) = 1 \neq 0$$

$$\text{donc } \begin{cases} \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) & \neq 0 \\ \det_{\mathcal{U}}(\mathcal{B}) & \neq 0 \end{cases}$$

$2 \implies 3$ Par existance des bases.

$3 \implies 1$ Par contraposition.

On suppose que $\mathcal{U}$ n'est pas une base. Comme $\mathcal{U}$ a n vecteurs, $\mathcal{U}$ est liée.

$\mathcal{U}$ est de la forme $(u_1, \ldots, u_{i-1}, \sum_{i \neq j} \lambda_j u_j, u_{i+1}, \ldots, u_n)$

Montrons $\forall \mathcal{B}$ base de $E, \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = 0$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}\left(u_1, ..., u_{i-1}, \sum_{i \neq j} \lambda_j u_j, u_{i+1}, \ldots, u_n\right) &= \sum_{i \neq j} \lambda_j \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \underbrace{\ldots}_{\text{un atreu } u_j}, u_n) \\ &= \sum_{i \neq j} \lambda_j \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Remarque 2 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux bases. Alors

$$\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0 \veebar \det_{\mathcal{B}_1} < 0$$

Définition 2

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que *deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ont la même orientation* lorsque $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$

Théorème 3

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, la relation "avoir la même orientation" est une relation d'équivalence ayant exactement 2 classes d'équivalences

Démonstration

exo

Orienter E, c'est choisir une base remarquable E et la décrété *directe*.
Cela détermine toutes les bases directes et toutes les bases indirectes.
Si E a une bases canonique, on la décrète *directe* !

Lemme 2

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E *euclidien.* Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux b.o.n.

Comment calculer $\det u$**?**

Théorème 4

Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de E
Alors

$$\det u = \det(u(\varepsilon_1), \ldots, u(\varepsilon_n))$$

Ce qui donne un moyen effectif de calcul de $\det u$

Démonstration

$$\forall f \in \mathcal{A}_n(E), f_u = \det u \cdot f$$

En particulier $\quad \forall f \in \mathcal{A}_n(E), f_u(\mathcal{B}) = \det u f(\mathcal{B})$

$$\text{ie} \quad \forall f \in \mathcal{A}_n(E), f(u(\varepsilon_1), \ldots, u(\varepsilon_n)) = \det u \cdot f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

Pour $f = \det_{\mathcal{B}}$ on obtient:

$$\det_{\mathcal{B}}(u(\varepsilon_1), \ldots, u(\varepsilon_n)) = \det u \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})}_{1}$$

Comment calculer $\det u$**?**

2.3 Déterminant d'une matrice

Définition 3 *Déterminant de* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\det M$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}$$

Remarque 3

On a donc $\det M = \det f_M$
En effet,

$$\begin{aligned}
\det f_M &= \det_{\mathcal{C}}(f_M(e_1), \dots, f_M(e_n)) \\
&= \det_{\mathcal{C}}(M \times e_1, \dots, M \times e_n) \\
&= \det_{\mathcal{C}} \left(\begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ n_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} m_{1n} \\ \vdots \\ m_{nn} \end{pmatrix} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}
\end{aligned}$$

Théorème 5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E
Alors

$$\det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u) = \det u$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$$\det \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} | & & | \\ u(\varepsilon_1) & \cdots & u(\varepsilon_n) \\ |_{\mathcal{B}} & & |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$$

En notant $\begin{matrix} | \\ u(\varepsilon_i) \\ | \end{matrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} m_{1i} \\ \vdots \\ m_{ni} \end{pmatrix}$ on a donc

$$\det \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}$$

Et

$$\begin{aligned}
\det u &= \det_{\mathcal{B}}(u(\varepsilon_1), \dots, u(\varepsilon_n)) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i} && \text{par définition}
\end{aligned}$$

Corollaire 2

$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est un invariant de similitude

2.4 Propriétés

Remarque 4

1. $\det \mathrm{id}_E = 1$
2. $\det I_n = 1$

Démonstration

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E donc
$$\begin{aligned}\det \mathrm{id}_E &= \det_{\mathcal{B}} \mathrm{id}_E(\mathcal{B}) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\det I_n &= \det f_{I_n} \\ &= \det \mathrm{id} \\ &= 1\end{aligned}$$

Théorème 6

1. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ alors
$$\det(u \circ v) = \det u \det v$$

2. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors
$$\det(M \times N) = \det M \det N$$

Démonstration

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E

$$\begin{aligned}
\det(u \circ v) &= \det_{\mathcal{B}}(u \circ v(\mathcal{B})) \\
&= \det_{\mathcal{B}_v}(u(\mathcal{B})) && f_u \text{ avec } f = \det_{\mathcal{B}} \text{ et } u = v \\
&= \det v \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \\
&= \det v \det u
\end{aligned}$$

2. $\boxed{\text{Meth. 1}}$

$$\begin{aligned}
\det(M \times N) &= \det f_{M \times N} \\
&= \det(f_M \circ f_N) && M \mapsto f_M \text{ est un isomorphisme d'algèbre} \\
&= \det f_M \det f_N && \text{d'après 1.} \\
&= \det M \det N && \text{par définition}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Meth. 2}}$

$$\begin{aligned}
f(v(x_1), \ldots, v(x_n)) &= \det u f(x_1, \ldots, x_n) \\
\det_{\mathcal{B}}(v \circ u(\varepsilon_1), \ldots, v \circ u(\varepsilon_n)) &= \det v \det_{\mathcal{B}}(u(\varepsilon_1), \ldots, u(\varepsilon_n)) \\
\det(v \circ u) &= \det u
\end{aligned}$$

Exercice 1 *Déterminant d'une symétrie*

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$

Alors

$$\det s = \pm 1$$

Montrons-le

$$\begin{aligned}
\det(s \circ s) &= \det(-\mathrm{id}) \\
\text{ie} \quad \det s \det s &= 1 \\
\text{ie} \quad \det s &= \pm 1
\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B}$ la base adaptée à la somme directe
$E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id})$

$$\begin{aligned}
\det s &= \det \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} s \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & -1 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot (-1)^{\dim \operatorname{Ker}(s+\mathrm{id})} \\
&= \begin{cases} -1 & \text{si } \dim \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}) \in 2\mathbb{N} + 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Remarque 5

1. $\det : GL(E) \to \mathbb{K}^*$ est bien définie et c'est un morphisme de groupe
2. $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$

Démonstration

1. Alors $1 = \det \mathrm{id} = \det(u \circ u^{-1}) = \det u \det u^{-1}$
   Donc $\det u \neq 0$ (et $\det u^{-1} = \frac{1}{\det u}$)
   Ceci étant vrai pour tout $u \in GL(E)$, l'application est bien définie.
   On a déjà vu $\forall u, v \in GL(E), \det(u \circ v) = \det u \det v$ donc c'est un morphisme de groupe
2. Idem avec f_M et f_N

Théorème 7 *Formule de la transposée*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Alors

$$\det {}^tM = \det M$$

Démonstration

Notons $M = (m_{ij})_{ij}$ Par définition:

$$\begin{aligned}
\det {}^t\!M &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} m_{\sigma^{-1}(j),j} && \text{par changement d'indice } j = \sigma(i) \text{ car } \sigma \text{ bijective} \\
&= \sum_{\delta \in S_n} \varepsilon(\delta^{-1}) \prod_{j=1}^{n} m_{\delta(j),j} && \text{par changement d'indice } \delta = \sigma^{-1}
\end{aligned}$$

Pour $\sigma \in S_n$: $\sigma(\delta^{-1}) = \varepsilon(\delta)^{-1} = \varepsilon(\delta)$ car $(\pm 1)^{-1} = \pm 1$ (et but $\varepsilon = \{+1, -1\}$)
Donc

$$\begin{aligned}
\det {}^t\!M &= \sum_{\delta \in S_n} \varepsilon(\delta) \prod_{j=1}^{n} m_{\delta(i),i} \\
&= \det M
\end{aligned}$$

3 Méthode de calcul d'un déterminant

3.1 Effet d'une opération élémentaire

Théorème 8

Soit $M = \begin{pmatrix} —L_1— \\ \vdots \\ —L_n— \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

1. La transvection $(C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j)$ préserve le déterminant
2. La dilataion $(C_i \leftarrow \lambda C_i)$ multipie le déterminant
3. La permutation $(C_i \leftrightarrow C_j)$ oppose le déterminant

Démonstration *On fait juste les lignes*

1.

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{C}}(C_1, \dots, C_i + \lambda C_j, \dots, C_n) &= \det_{\mathcal{C}}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \lambda \det_{\mathcal{C}}(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) && \text{par } n\text{-linéairité} \\
&= \det M + \lambda \times 0 && \text{par caractère alterné}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{C}}(C_1,\dots,\mu C_i,\dots,C_n) &= \mu \det_{\mathcal{C}}(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n)\\ &= \mu \det M\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{C}}(C_1,\dots,C_j,\dots,C_i,\dots,C_n) &= -\det_{\mathcal{C}}(C_1,\dots,C_i,\dots,C_j,\dots,C_n) && \text{par antisymétrie}\\ &= -\det M\end{aligned}$$

Remarque 6

Les opérations élémentaire permettent de calculer le *déterminant de Vandermonde*

$$\det\begin{pmatrix}1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1}\\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1}\end{pmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} \alpha_j - \alpha_i$$

3.2 Déterminants par blocs

Remarque 7

Une matrice par bloc est une matrice de forme:

$$\left(\begin{array}{c|c}\text{A} & \text{B}\\ \hline \text{C} & \text{D}\end{array}\right) \in \mathcal{M}_{p+q,r+s}(\mathbb{K})$$

où $\begin{cases}A & \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})\\ B & \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{K})\\ C & \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})\\ D & \in \mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{K})\end{cases}$

ou plus généralement

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p}\\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p}\\ \hline \vdots & & & \\ \hline A_{q1} & \cdots & \cdots & A_{pq}\end{array}\right)$$

Théorème 9

Par définition du produit matriciel

$$\begin{array}{c} \\ m \updownarrow \\ n \updownarrow \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overset{p}{\leftrightarrow} & \overset{q}{\leftrightarrow} \\ A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \times \begin{array}{c} \\ p \updownarrow \\ q \updownarrow \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overset{r}{\leftrightarrow} & \overset{s}{\leftrightarrow} \\ A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array} \right)$$

On a un résultat analogue avec plus de blocs.

Théorème 10

Soient $\begin{cases} A & \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \\ B & \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}) \\ D & \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}) \end{cases}$.

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \text{A} & \text{B} \\ \hline (0) & \text{D} \end{array} \right) = \det A \det D$$

Démonstration

Notons $n = p + q$ Notons $\begin{cases} \mathcal{C}_p = (e_1, \ldots, e_p) & \text{la base canonique de } \mathbb{K}^p \\ \mathcal{C}_q = (e_1, \ldots, e_q) & \text{la base canonique de } \mathbb{K}^q \end{cases}$

Posons $f : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \to \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto \det \left(\begin{array}{ccc|c} | & & | & \\ x_1 & \cdots & x_n & B \\ | & & | & \\ \hline & (0) & & D \end{array} \right) \end{cases}$.

On a

$$\begin{aligned} & f \in \mathcal{A}_p(\mathbb{K}^p) \\ \text{donc} \quad & f = f(\mathcal{C}_p) \det_{\mathcal{C}_p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ (0) & D \end{array} \right) &= f(A) \\ &= f(\mathcal{C}_p) \det_{\mathcal{C}}(A) \end{aligned}$$

$$\text{ie} \quad \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ (0) & D \end{array} \right) = \det A \times \det \left(\begin{array}{c|c} I_p & B \\ (0) & D \end{array} \right)$$

Or

$$\det A \times \det \left(\begin{array}{c|c} I_p & B \\ (0) & D \end{array} \right) = \det A \times \det \left(\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ (0) & D \end{array} \right)$$

, car en notant $B = (b_{ij})_{ij}$, on fait

$$C_{p+1} \leftarrow C_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} b_{i1} C_i$$

$$\vdots$$

$$C_{p+q} \leftarrow C_{p+q} - \sum_{i=1}^{p} b_{iq} C_i$$

Notons $g : \begin{cases} \mathbb{K}^q & \to \mathbb{K} \\ (y_1, \dots, y_q) & \mapsto \det \left(\begin{array}{c|ccc} I_p & & (0) & \\ \hline & | & & | \\ (0) & y_1 & \cdots & y_q \\ & | & & | \end{array} \right) \end{cases}$.

$$g \in \mathcal{A}_q(\mathbb{K}^q) \text{donc} \quad g = g(\mathcal{C}_q) \det_{\mathcal{C}_q}$$

$$\det \left(\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline (0) & D \end{array} \right) = g(D)$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline (0) & I_q \end{array} \right)}_{\det I_1 = 1} \det D$$

Conclusion

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & D \end{array} \right) = \det A$$

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline (0) & D \end{array} \right)$$

$$= \det A \det D$$

Remarque 8

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E
tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \overset{p}{\leftrightarrow} & \overset{q}{\leftrightarrow} \\ A & B \\ \hline (0) & D \end{array} \right)$$

Alors $\mathcal{B} = (\underbrace{u_1, \dots, u_p}_{\in F}, \underbrace{v_1, \dots, v_q}_{\in G}$ est une base adaptée à une somme directe $F \oplus G = E$ telle que F est *stable par* u, i.e. u induit un endomorphisme sur F, i.e. $u\big|_F^F \in \mathcal{L}(F)$

Théorème 11

1. $\det \begin{pmatrix} A & (0) \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det D$

2. $\det \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & (0) & (0) & (0) \\ \hline \cdot & A_2 & (0) & (0) \\ \hline \cdot & \cdot & \ddots & (0) \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & A_n \end{array}\right)$

3. $\det \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & \cdot & \cdot \\ \hline (0) & \ddots & \cdot \\ \hline (0) & (0) & A_n \end{array}\right) = \det A_1 \cdots \det A_n$

4. $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) & (0) \\ \cdot & \ddots & (0) \\ \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

5. $\det {}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) & (0) \\ \cdot & \ddots & (0) \\ \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

6. $\det {}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) & (0) \\ (0) & \ddots & (0) \\ (0) & (0) & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

7. $\det {}^t \begin{pmatrix} \lambda & (0) & (0) \\ (0) & \ddots & (0) \\ (0) & (0) & \lambda \end{pmatrix} = \det(\lambda I_n) = \lambda^n$

3.3 Développements

Notation 1 *Rappel*

On note M_{ij} la matrice obtenue en barrant le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice M

Définition 4 (i,j) *cofacteur de* M

$$\mathrm{cof}_{i,j}(M) = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

Théorème 12

1. *dev/i ème ligne* $\det M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det M_{ij} m_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{cof}_{i,j}(M) m_{ij}$
2. *dev/j ème colonne* $\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det M_{ij} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{cof}_{i,j}(M) m_{ij}$

Démonstration

Notons $M = \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$

Quitte à transposer il suffit de montrer 2.

$$\begin{aligned}
\det M &= \det_{\mathcal{C}}(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) && \text{on applique le } j\text{-cycle } (1\ 2\ \dots\ j) \text{ et par antisymétrie} \\
&= \underbrace{(-1)^{j-1}}_{\text{signature du } j\text{-cycle}} \det_{\mathcal{C}}(C_j, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n) \\
&= (-1)^{j-1} \det_{\mathcal{C}}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i, C_i, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} m_{ij} \det_{\mathcal{C}}(e_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n) && \text{par } n\text{-linéarité}
\end{aligned}$$

Par antisymétrie et en appliquant *sur les lignes* le i-cycle $(1\ 2\ \dots\ i)$, en notatnt $\hat{C}_k$ la colonne obtenue en appliquant le k-cycle

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} m_{ij} \det_{\mathcal{C}}(e_1, \hat{C}_1, \dots, \hat{C}_n) \\
&= \sum (-1)^{i+j-2} \det(M_{ij}) m_{ij} && \text{par définition}
\end{aligned}$$

3.4 Co-matrice

Définition 5 *Comatrice de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

$$\mathrm{Com}(M) = \left(\mathrm{cof}_{i,j}(M)\right)_{ij}$$

Exemple 2 $n \geq 2$

$$\mathrm{Com} \begin{pmatrix} 1 & — & 1 \\ | & & | \\ 1 & — & 1 \end{pmatrix} = \left((-1)^{i+j} \det(1)\right)_{ij}$$

Exemple 3

$$\operatorname{Com}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+|0,1;1,0| & -|1,1;1,0| & +|1,0;1,1|\\ -|1,1;1,0| & ++|0,1;1,0| & -|0,1;1,1|\\ +|1,1;0,1| & -|0,1;1,1| & +|0,1;1,0|\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Exemple 4

$$\operatorname{Com}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+d & -c\\ -b & +a\end{pmatrix}$$

Théorème 13

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. $M \times {}^t\operatorname{Com} M = {}^t\operatorname{Com} M \times M = \det M I_n$
2. $\det M \neq 0 \implies M^{-1} = \frac{1}{\det M}{}^t\operatorname{Com} M$

Démonstration

exo (Il suffit d'utiliser la formule de dev. (ligne ou colonne))

Application 1

1. Pour $ad - bc \neq 0$,
$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Application 2 *Montrer que* $GL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}),\ \det M = \pm 1\}$

On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, i.e. l'ensemble des matrices carrées de taille n telles que

- les coefficients sont entiers
- l'inverse existe
- les coefficients *de l'inverse* sont entiers

$\boxed{\subset}$ Soit $M \in GL_n(\mathbb{Z})$. Alors $M^{-1} \in GL_n(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}1 &= \det I_n \\ &= \det(M \times M^{-1}) \\ &= \underbrace{\det M}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\det M^{-1}}_{\in \mathbb{Z}} \qquad \text{Car } \begin{cases} M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \text{donc} \quad \det M \in \mathbb{Z} \\ M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \text{donc} \quad \det M^{-1} \in \mathbb{Z} \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\det M \in \mathbb{Z}^\times = \{+1, -1\}$

$\boxed{\supset}$ Supposons $\det M \in \{+1, -1\}$ donc $\det M \neq 0$ donc M inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det M}_{\in \{+1,-1\} \subset \mathbb{Z}}} \ (\mathrm{cof}_{i,j}(M))_{ij}$$

Et pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{cof}_{i,j} M = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\in \mathbb{Z}} \det(\underbrace{M_{ij}}_{\in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{Z})}) \in \mathbb{Z}$

D'où $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$