Fonctions dérivables

Rolle et les accroissements finis

Exercice 1. *Une limite.*

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}}\right]$.

Exercice 2. *Rolle infini.*

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f \underset{\pm\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 3.

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1)f'(1) < 0$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]0,1[$ tel qu'on ait $f'(c) = 0$.

Exercice 4. *Lipschitzienne VS $\mathcal{C}^1$, sur un segment*

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que f est lipschitzienne.
2. Soit $f \in \mathcal{D}^1([a,b],\mathbb{R})$ lipschitzienne. Est-elle nécessairement $\mathcal{C}^1$?
3. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ périodique. Montrer que f est lipschitzienne.

Accroissements finis généralisé et règle de l'Hospital

Exercice 5. Supposons données deux réels $a < b$ et deux fonctions f et g, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

1. Montrer le **théorème des accroissements finis généralisé :**
   Il existe $c \in]a,b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.
   En quoi est-ce une généralisation des accroissements finis ?
2. Monter que, si on suppose :
   i. $f(a) = g(a) = 0$;
   ii. g' ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a) ;
   iii. $\lim\limits_{a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$;

   alors g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf en a), et on a : $\lim\limits_{a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.
   C'est la fameuse règle de L'Hospital, dans son cas d'application non trivial.
3. *Applications :*
   a. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - \mathrm{e}^x}{(x+1)\mathrm{e}^x - 1}$.
   b. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{ch}(x) - \cos(x)}{\ln(1+x) - \sin x}$.
   c. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\arccos(1-x)}$.
   d. Peut-on dire que la règle de l'Hospital sert à quelque chose ?

EXM DÉRIV

$\boxed{1}$

On cherche $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$

pour $f := \begin{cases} \mathbb{R}_+^\times \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^{1+\frac{1}{x}} \end{cases}$

$$= e^{\left(\frac{1}{x}+1\right)\ln x}$$

Pour $x > 0$

$\begin{cases} f \in \mathcal{C}([x, x+1]) \\ f \in \mathcal{D}(]x, x+1[) \end{cases}$ par thm généreux

donc d'après l'EAF, il existe $c_x \in]x, x+1[$

tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$

Par thm généreux

$$f' = \left(-\frac{\ln}{\mathrm{Id}^2} + \frac{1}{\mathrm{Id}} + \frac{1}{\mathrm{Id}^2}\right) e^{\left(1+\frac{1}{\mathrm{Id}}\right)\cdot \ln}$$

$$= \left(-\frac{\ln}{\mathrm{Id}^2} + \frac{1}{\mathrm{Id}} + \frac{1}{\mathrm{Id}^2}\right) \mathrm{Id}^{1+\frac{1}{\mathrm{Id}}}$$

$$= \left(-\frac{\ln}{\mathrm{Id}} + 1 + \frac{1}{\mathrm{Id}}\right) \mathrm{Id}^{\frac{1}{\mathrm{Id}}}$$

Par CC $\dfrac{\ln}{\mathrm{Id}} \xrightarrow[\infty]{} 0$

$\mathrm{Id}^{\frac{1}{\mathrm{Id}}} = e^{\frac{\ln}{\mathrm{Id}}} \xrightarrow[\infty]{} 1$ car $\exp \in \mathcal{C}(\{0\}, \mathbb{R})$

$1 + \dfrac{1}{\mathrm{Id}} \xrightarrow[\infty]{} 1$ par PAL donc $f' \xrightarrow[\infty]{} 1$ par PAL

$c_x \in [x, x+1]$ donc par TdG, $c_x \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty$

donc $f'(c_x) \xrightarrow[\infty]{} \lim_{\infty} f' = 1$

donc $(\mathrm{Id}+1)^{1+\frac{1}{\mathrm{Id}+1}} - \mathrm{Id}^{1+\frac{1}{\mathrm{Id}}} \xrightarrow[\infty]{} 1$

EX M DERIV

$\boxed{2/1}$ Montrons qu'il existe $a<b$ tel que $f(a)=f(b)$ par l'absurde.

Supposons pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $f(a) \neq f(b)$.

On a $f \in \Theta\Theta$

or $f \in \mathcal{D} \subset \mathcal{C}$

donc $f \in \overset{\nearrow}{\searrow}$

On a
$$\begin{cases} \ell = \lim\limits_{-\infty} f < \lim\limits_{+\infty} f = \ell \\ \ell = \lim\limits_{-\infty} > \lim\limits_{+\infty} f = \ell \end{cases} \xrightarrow{\text{imp}}$$

Donc il existe $a<b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \\ f \in \mathcal{D}(]a,b[, \mathbb{R}) \end{cases}$$

D'après Rolle, $\exists c \in]a,b[\subset \mathbb{R}$, $f'(c) = 0$

$\boxed{4/1}$

$$f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow f' \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$$

$\Rightarrow f'$ bornée par TBA

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}([a,b], \mathbb{R})$ par IAF

$\boxed{4/2}$

$$f := \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On sait que:

$$f \in \mathcal{D} \wedge f \notin \mathcal{C}^1$$

$$f' := \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

$$|f'(0)| = 0 \leq$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, |f'(x)| \leq \left|2x \sin \frac{1}{x}\right| + \left|\cos \frac{1}{x}\right|$$

Rappel: $|\sin| \leq |\mathrm{id}_{\mathbb{R}}|$.

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |f'(x)| \leq 2\left|x \times \frac{1}{x}\right| + 1 = 3$$

$\Rightarrow f \in 3\mathcal{L} \Rightarrow$ NON,

$\boxed{4/3}$

$$f \in (\circlearrowleft_T \cap \mathcal{C}^1)(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow f' \in \circlearrowleft_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \qquad \text{par TDFC}$$

$$(f \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + T))' = f'$$

$$\Rightarrow f'^{\rightarrow}(\mathbb{R}) = f'^{\rightarrow}([0, T]) \subset \text{segments}$$

TBA, IAF, tout ça tout ça.

Fonctions dérivables

Correction du dernier exercice.

Exercice 5. Supposons données deux réels $a < b$ et deux fonctions f et g, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer le **théorème des accroissements finis généralisé :**
Il existe $c \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.
En quoi est-ce une généralisation des accroissements finis ?

• Comme d'habitude, on applique Rolle à la bonne fonction auxilliaire. Par exemple, notons h la fonction définie sur $[a, b]$ par
$h(t) = (f(b) - f(a))(g(t) - g(b)) - (g(b) - g(a))(f(t) - f(b))$. Montrons que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.

i/ Les fonctions $t \mapsto f(a)$, $t \mapsto f(a)$, f et g sont continues sur $[a, b]$. Ainsi, h est bien continue sur $[a, b]$ comme somme et produit de fonctions continues sur $[a, b]$.

ii/ Les fonctions $t \mapsto f(a)$, $t \mapsto f(a)$, f et g sont dérivables sur $]a, b[$. Ainsi, h est bien dérivable sur $]a, b[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]a, b[$.

iii/ On a $h(a) = (f(b) - f(a))(g(a) - g(b)) - (g(b) - g(a))(f(a) - f(b)) = 0$
et $h(b) = (f(b) - f(a))(g(b) - g(b)) - (g(b) - g(a))(f(b) - f(b)) = 0 - 0 = 0$.
En particulier on a bien $h(a) = h(b)$.

• La fonction h vérifie bien les hypothèse du théorème de Rolle.
Ce dernier indique alors qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

• Calculons h' :

$$\begin{array}{rcll} h'(t) & = & \big[(f(b) - f(a))(g(t) - g(b)) - (g(b) - g(a))(f(t) - f(b))\big]' & \text{par définition} \\ & = & (f(b) - f(a))\big[g(t) - g(b)\big]' - (g(b) - g(a))\big[f(t) - f(b)\big]' & \text{par linéarité de la dérivation} \\ & = & (f(b) - f(a))g'(t) - (g(b) - g(a))f'(t) & \end{array}$$

Ainsi a-t-on $f'(c) = 0 \Leftrightarrow (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$.

Ce qui constitue bien le résultat demandé.

• Pour $g = \mathrm{id}$, on retrouve l'égalité des accroissements finis.

2. Monter que, si on suppose :
   i. $f(a) = g(a) = 0$;
   ii. g' ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a) ;
   iii. $\lim\limits_a \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$;

alors g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf en a), et on a : $\lim\limits_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.
C'est la fameuse règle de L'Hospital, dans son cas d'application non trivial.

• Tout d'abord, g ne s'annuler pas au voisinage de a. En effet, si elle s'annulait en un réel $x \in]a, b[$, elle serait en particulier continue sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$) et dérivable sur $]a, x[$ (ou $]x, a[$), et donc d'après le théorème de Rolle il existerait $d \in [a, x]$ (ou $[x, a]$) tel que $g'(d) = 0$ et donc g' s'annulerait au voisinage de a.

• Soit $x \in]a, b[$. On exploite le résultat de la question 1, mais en se plaçant cette fois sur $[a, x]$ plutôt que sur $[a, b]$.

i/ f et g étant continues sur $[a, b]$, elles le sont en particulier sur $[a, x]$

ii/ f et g sont dérivables sur $]a, b[$, elles le sont en particulier sur $]a, x[$

iii/ g' ne s'annule pas sur $]a, b[$, donc en particulier ne s'annule pas sur $]a, x[$ et $g(a) \neq g(x)$ puisque g ne s'annule qu'en a.

Ainsi d'après la question 1, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$.
Comme on a $f(a) = g(a) = 0$, cela se réécrit $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$.

• Yapuka. Pour tout $x \in]a, b]$, il existe $c_x \in]a, x]$ tel que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$.
Comme $a < c_x \leqslant x$, le TdG montre que $\lim\limits_{x \to a^+} c_x = a$ et par suite :
$\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

3. *Applications :*

   a. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - \mathrm{e}^x}{(x+1)\mathrm{e}^x - 1}$.

   b. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{ch}(x) - \cos(x)}{\ln(1+x) - \sin x}$.

   c. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\arccos(1-x)}$.

   d. Peut-on dire que la règle de l'Hospital sert à quelque chose ?

   a. C'est une forme indéterminée. Mais les hypothèses de l'Hospital sont vérifiées.
   Avec l'Hospital : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - \mathrm{e}^x}{(x+1)\mathrm{e}^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\sin(x) - \mathrm{e}^x}{(x+1)\mathrm{e}^x} = -1/2$.
   Remarque : un bon petit DL donnerait la même chose en plus rapide.

   b. C'est une forme indéterminée. Mais les hypothèses de l'Hospital sont vérifiées. Quand on l'applique, on a encore une forme indéterminée, mais pour laquelle les hypothèses de l'Hospital sont encore vérifiées.
   Donc on l'applique deux fois : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{ch}x - \cos x}{\ln(1+x) - \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sh}x + \sin x}{1/(x+1) - \cos(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{ch}x + \cos x}{\sin x - 1/(x+1)^2} = -2$.
   Remarque : un bon petit DL donnerait la même chose en beaucoup plus rapide.

   c. C'est une forme indéterminée. Mais les hypothèses de l'Hospital sont vérifiées.
   Avec l'Hospital : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\arccos(1-x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1/(2\sqrt{x})}{1/\sqrt{x(2-x)}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1/2}{1/\sqrt{2-x}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Remarque : pour le coup, on ne peut pas traiter celle-ci directement avec un DL car les fonctions ont une dérivé de limite infinie en 0. À vrai dire, on pourrait quand même s'en sortir avec un DA, mais cela demanderait pour le coup bien plus de travail que cette petite application de l'Hospital.

   d. On pourrait croire que les DL, ou du moins les DA, rendent inutiles la règle de l'Hospital. Et effectivement, c'est vrai. Mais dans de rares cas comme le troisième exemple, la règle de l'Hospital est tout de même plus performante.